Ch10: Analyzing Randomized Algorithms

305234

Algorithm Analysis and Design

Jiraporn Pooksook
Naresuan University

Indicator Random Variables

- The **indicator random variable** I{A} associated with event A is defined as:
- I{A} = 1 if A occurs,
0 if A does not occur
- For example, let us determine the expected number of heads we obtain when flipping a fair coin. S = {H,T}, with Pr{H}=Pr{T}=1/2.
- We define an indicator random variable X_H, associated with the coin coming up heads, which is the event H.
- X_H = I{H} = 1 if H occurs
0 if T occurs
- The expected number of heads obtain in one flip is then the expected value of X_H :

$$E[X_H] = E[\, I\{H\}\,] = 1.Pr\{H\} + 0.Pr\{T\}$$
$$= 1.(1/2)+ 0.(1/2) = 1/2$$

Lemma: give a sample space S and an event A in S, let X_A = I{A}. Then $E[X_A]$ = Pr{A}.

Indicator Random Variables

- For example, we find the number of heads in n coin flips.
- Let X_i be the indicator random variable.
- $X_i = I\{H\} = 1$ if H occurs in the i^{th} flip

  0 if T occurs in the i^{th} flip
- Let X be the indicator random variable denoting the total number of heads in the n coin flips.

$$\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Therefore the expectation is

$$\mathrm{E[X]} = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = n/2$$

$E[X_i] = E [I\{H\}]$

$= 1.Pr\{H\} + 0.Pr\{T\}$

$= 1.(1/2)+ 0.(1/2)$

$= 1/2$

Analyzing The Hiring Problem

- Let X_i be the indicator random variable associated with the event in which the i^{th} candidate is hired.
- X_i = I{candidate i is hired}

  = 1 if candidate i is hired,

  0 if candidate i is not hired
- and $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
- From lemma, $E[X_i]$ = Pr{candidate i is hired}

Analyzing The Hiring Problem

- Considering a candidate i is hired when candidate i is better than each of candidates 1 to i-1. Thus, candidates I has a probability of 1/i of being better qualified than candidates 1 to i-1 and thus, a probability of 1/i of being hired.
- From lemma, $E[X_i]$ = Pr{candidate i is hired}
- We can conclude $E[X_i] = 1/i$

Analyzing The Hiring Problem

- Now we can compute E[X]:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E[X]} &= \left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} [X_i] \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1/i \\
&= \ln n + O(1)
\end{aligned}
$$

If we interview n people, we only hire approximately ln n of them on average.

Lemma:
Assuming that the candidates are presented in a random order, algorithm Hire-Assistant has a total hiring cost of O (c_h ln n).

The Hiring Problem

```
Pseudo code: Randomized-Hire-Assistant(n)
randomly permute the list of candidates
best = 0 // dummy candidate
for i = 1 to n
        do interview candidate i
        if candidate i is better than candidate best
                then best = i
                        hire candidate i
```

Randomly permuting arrays

- We randomize the input by permuting the give input array.
- We assign each element A[i] of the array a random priority P[i], and then sort the elements of A according to these priorities.

A	1	2	3	4
P	36	3	97	19

- Then we would produce an array B = [2,4,1,3]

Randomization method: Permute By Sorting

```
Pseudo code: Permute-By-Sorting(A)
N = length[A]
for i = 1 to n
        do P[i] = Random(1,n^3)

sort A, using P as sort keys
return A
```

Randomization method: Permute By Sorting

- We use a range of 1 to n^3 to make it likely that all the properties in P are unique.
- The time consuming step is in line 4. If we use merge sort , it takes $\Theta(n \lg n)$ time.

Randomization method: Permute By Sorting

Lemma:
procedure Permute-By-Sorting produces a uniform random permutation of the input, assuming that all priorities are distinct.

- Let X_i be the event that element A[i] receives the ith smallest priority.
- We have $\Pr\{X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_{n-1} \cap X_n\} = \Pr\{X_1\}. \Pr\{X_2 \mid X_1\}. \Pr\{X_3 \mid X_1 \cap X_2\} \ldots \Pr\{X_n \mid X_1 \cap \ldots \cap X_{n-1}\}$
- We have $\Pr\{X_1\} = 1/n$ and $\Pr\{X_2 \mid X_1\} = 1/(n-1)$, and so on
- We have that $\Pr\{X_i \mid X_1 \cap \ldots \cap X_{i-1}\} = 1/(n-i+1)$
- Hence,
  $\Pr\{X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_{n-1} \cap X_n\} = (1/n). (1/n-1) \ldots (1/2).(1/1)$
  $= 1/n!$

Prob. ที่อาเรย์ตำแหน่ง i จะได้ค่า priority น้อยสุด

Randomization method: Randomize-in-place

- Another method for generating a random permutation is to permute the given array in place. The procedure Randomize-in-place does in O(n) time.

Pseudo code: Randomize-In-Place(A)

```
N = length[A]
for i = 1 to n
        do swap (A[i], A[Random(1,n)]
```

Randomization method: Randomize-in-place

	1	2	3	4	5	6	
		6	3	5	5		
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
4	a_4	a_2	a_3	a_1	a_5	a_6	
	a_4	a_6	a_3	a_1	a_5	a_2	
	a_4	a_6	a_3	a_1	a_5	a_2	
	a_4	a_6	a_3	a_5	a_1	a_2	
	a_4	a_6	a_3	a_5	a_1	a_2	1
	a_2	**a_6**	**a_3**	**a_5**	**a_1**	**a_4**	

Randomization method: Randomize-In-Place

Lemma:
procedure Permute-By-Sorting produces a uniform random permutation of the input, assuming that all priorities are distinct.

- จากตัวอย่าง วิเคราะห์ความน่าจะเป็นที่จะเกิด output ตัวเลขในแบบนึงๆ
- รอบที่ 1 โอกาสที่จะเลือก มี = 1/6
- รอบที่ 2 โอกาสที่จะเลือก มี = 1/5
- รอบที่ 3 โอกาสที่จะเลือก มี = 1/4
- รอบที่ 4 โอกาสที่จะเลือก มี = 1/3
- รอบที่ 5 โอกาสที่จะเลือก มี = 1/2
- รอบที่ 6 โอกาสที่จะเลือก มี = 1
- ดังนั้น probability ที่จะเกิดแต่ละ output = 1/6. 1/5. 1/4. 1/3. 1/2. 1
  = 1/720

Randomization method: Randomize-In-Place

Lemma:
procedure Permute-By-Sorting produces a uniform random permutation of the input, assuming that all priorities are distinct.

- Given a set of n elements, a k-permutation is a sequence containing k of n elements. There $n!/(n-k)!$ Possible k-permutations.
- Therefore, for each possible (i-1) permutation, we assume that the subarray A[1…i-1] contains this permutation with probability $(n-i+1)!/n!$
- Let $\Pr\{X_1\} = (n-i+1)!/n!$ and X_2 be the event that ith iteration plus x_i in position A[i]. Then the i-permutation $(x_1, \ldots x_i)$ is formed in A[1..i] when both X_1 and X_2 occur.

Randomization method: Randomize-In-Place

Lemma:
procedure Permute-By-Sorting produces a uniform random permutation of the input, assuming that all priorities are distinct.

- We have $\Pr\{X_1 \cap X_2\} = \Pr\{X_1\} . \Pr\{X_2 | X_1\}$.
- The probability of $\Pr\{X_2 | X_1\} = 1/(n-i+1)!$
- Thus we have $\Pr\{X_1 \cap X_2\} = \Pr\{X_1\} . \Pr\{X_2 | X_1\}$

$$= 1/(n-i+1)! \;.\; (n-i+1)!/n!$$

$$= (n-i)!/n!$$

For subarray A[1..n] which is n-permutation with probability $(n-n)! / n! = 1/n!$

Example : Probabilistic Analysis

- โยนเหรียญหนึ่งเหรียญ ซึ่งเป็นเหรียญที่มีความน่าจะเป็นที่จะออกหัว และก้อย เท่าๆกัน พนันกันว่า หากโยนเหรียญแล้วออก หัว จะได้เงิน 1 ดอลลาร์ จงหาว่าคุณจะได้เงินรางวัลเท่าไหร่ หากโยนเหรียญทั้งหมด 5 ครั้ง
- โยนเหรียญหนึ่งเหรียญ ซึ่งเป็นเหรียญที่มีความน่าจะเป็นที่จะออกหัว และก้อย เท่าๆกัน จงหา ค่าความน่าจะเป็นที่ไม่ออกหัวเลยสักครั้ง ในการโยนทั้งหมด 5 ครั้ง จะเป็นเท่าไหร่
- โยนเหรียญหนึ่งเหรียญ ซึ่งเป็นเหรียญที่มีความน่าจะเป็นที่จะออกหัว และก้อย เท่าๆกัน จงหาว่า ถ้าหากโยนเหรียญทั้งหมด 5 ครั้ง แล้วจงหา ค่าความน่าจะเป็น ที่จะออก หัว แค่ 1 ครั้งเท่านั้น จะเป็นเท่าไหร่

Example: Probabilistic Analysis

- โยนเหรียญหนึ่งเหรียญ ซึ่งเป็นเหรียญที่มีความน่าจะเป็นที่จะออกหัว และ ก้อย เท่าๆกัน พนันกันว่า หากโยนเหรียญแล้วออก หัว จะได้เงิน 1 ดอลลาร์ จงหาว่า คุณจะได้เงินรางวัลเท่าไหร่ หากโยนเหรียญทั้งหมด 5 ครั้ง
- I{เหรียญออกหัว} = 1 if H occurs

  0 if T occurs
- X_i = I{เหรียญออกหัว ตอนโยนครั้งที่ i}
- X = จำนวนครั้งทั้งหมดที่โยนแล้วเหรียญออกหัว

  $= X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ (เพราะว่าโยนห้าครั้ง)
- $E[X] = E[X] = E[X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5]$

  $= E[X_1]+ E[X_2]+ E[X_3] + E[X_4]+ E[X_5]$

  $= ½ + ½ + ½ + ½ + ½ = 5/2 = 2.5$

$E[X_i\ ]$ = E [I{เหรียญออกหัว โยนครั้งที่ i}]

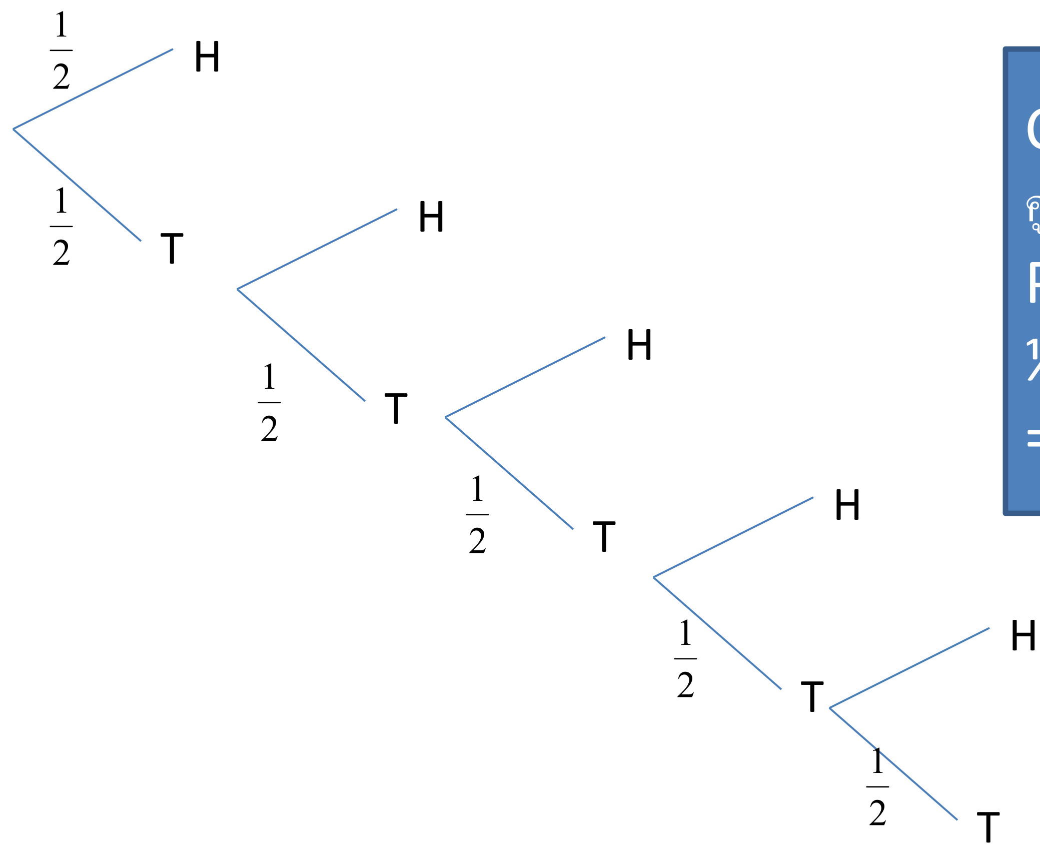
= 1.Pr{H} + 0.Pr{T}

= 1.(1/2)+ 0.(1/2)

= 1/2

Example: Probabilistic Analysis

- โยนเหรียญหนึ่งเหรียญ ซึ่งเป็นเหรียญที่มีความน่าจะเป็นที่จะออกหัว และ ก้อย เท่าๆกัน จงหาค่าความน่าจะเป็นที่ไม่ออกหัวเลยสักครั้งในการโยนทั้งหมด 5 ครั้ง จะเป็นเท่าไหร่
- ทำได้โดยการวาดทรี ซึ่ง event ที่เราสนใจคือ ออกก้อยทั้ง 5 ครั้ง



Conditional probability
คูณค่าความน่าจะเป็นของทั้ง path จะได้
Pr{T,T,T,T,T} =
½*1/2*1/2*1/2*1/2
= 1/32

Example : Probabilistic Analysis

- โยนเหรียญหนึ่งเหรียญ ซึ่งเป็นเหรียญที่มีความน่าจะเป็นที่จะออกหัว และ ก้อย เท่าๆกัน จงหาว่า ถ้าหากโยนเหรียญทั้งหมด 5 ครั้ง แล้วจงหา ความน่าจะเป็นที่จะออก หัว แค่ 1 ครั้งเท่านั้น จะเป็นเท่าไหร่
- ดังนั้น event ที่เราสนใจคือ
- เหรียญออกหัว เฉพาะตอนโยนครั้งที่ 1 =>>> ถ้าโยนห้าครั้งแล้วออกแบบนี้ H T T T T
- เหรียญออกหัว เฉพาะตอนโยนครั้งที่ 2 =>>> ถ้าโยนห้าครั้งแล้วออกแบบนี้ T H T T T
- เหรียญออกหัว เฉพาะตอนโยนครั้งที่ 3 =>>> ถ้าโยนห้าครั้งแล้วออกแบบนี้ T T H T T
- เหรียญออกหัว เฉพาะตอนโยนครั้งที่ 4 =>>> ถ้าโยนห้าครั้งแล้วออกแบบนี้ T T T H T
- เหรียญออกหัว เฉพาะตอนโยนครั้งที่ 5 =>>> ถ้าโยนห้าครั้งแล้วออกแบบนี้ T T T T H
- Pr{เหรียญออกหัวตอนโยนครั้งที่ 1 } = ½ * ½ * ½ * ½ * ½ = 1/32

ซึ่งเท่ากันกับ Pr ของการที่ เหรียญออกหัวตอนโยนครั้งที่ 2 ,3,4,5

ดังนั้น

Pr{เหรียญออกหัว 1 ครั้ง } = 1/32 + 1/32+ 1/32+ 1/32+ 1/32

= 5/32

Practice: Probabilistic Analysis

- มีคน 20 คนอยู่ในงานปาร์ตี้ แล้วโยนเสื้อของตัวเองปนกัน ต่อมาให้กลับไปหยิบเสื้อ คำถามคือจงหาว่า โดยเฉลี่ยแล้ว(expected value) จะมีกี่คนที่จะเจอเสื้อของตัวเอง
- มีบอล 5 ลูก มีถัง 5 ใบ โยนบอลทั้ง 5 ลูกนั้น แล้วจงหาว่า expected value (ค่าเฉลี่ย) ที่บอลจะลงในถังใบที่ 1 จะมีกี่ลูก
- มีถัง 5 ใบ ให้หาว่าโดยเฉลี่ยแล้ว จะต้องโยนกี่ครั้งถึงจะมีบอลลงในถังใบที่ 2 (บอลลงครั้งแรก)

Practice: Probabilistic Analysis

- มีคน 20 คนอยู่ในงานปาร์ตี้ แล้วโยนเสื้อของตัวเองปนกัน ต่อมาให้กลับไปหยิบเสื้อ คำถามคือจงหาว่า โดยเฉลี่ยแล้ว(expected value) จะมีกี่คนที่จะเจอเสื้อของตัวเอง
- I{หยิบเสื้อครั้งที่ i} = 1 if คนที่ i หยิบได้เสื้อของตัวเอง
  0 if คนที่ i ไม่สามารถหยิบได้เสื้อตัวเอง
- Pr{คนที่ 1 หยิบได้เสื้อตัวเอง} = 1/20.1
- Pr{คนที่ 2 หยิบได้เสื้อตัวเอง} = 1/20. 0 + 19/20. 1/19
- Pr{คนที่ 3 หยิบได้เสื้อตัวเอง} = 2/20. 0 + 18/20. 1/18
- X_i = I{หยิบเสื้อครั้งที่ i}
- X = จำนวนคนทั้งหมดที่หยิบเสื้อของตัวเองกลับไปได้
- $E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_{19}] \,.\, E[X_{20}]$
  $= 1/20 * 20 = 1$

คนที่ 1 เอาเสื้อไปแล้ว
(ไม่ได้เสื้อตัวเอง)

เหลือเสื้ออีก 19 ตัวให้
คนที่สองเลือก โอกาส
ถูกคือ 1/19

Practice: Probabilistic Analysis

- มีบอล 5 ลูก มีถัง 5 ใบ โยนบอลทั้ง 5 ลูกนั้น แล้วจงหาว่า expected value ที่บอลจะลงในถังใบที่ 1 จะมีกี่ลูก
- I{โยนครั้งที่ i แล้วลูกบอลลงถังใบที่ 1} = 1 if บอลลงถังใบที่ 1

  0 if บอลไม่ลงถังใบที่ 1
- X_i = I{โยนครั้งที่ i แล้วลูกบอลลงถังใบที่ 1}
- $E[X_i] = 1/5.1 + 4/5.0 = 1/5$
- X = จำนวนบอลทั้งหมดที่ลงถังใบที่ 1 จากการโยนทั้งหมด 5 ครั้ง
- $E[X] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + E[X_4] + E[X_5]$

  $= 1/5+1/5+1/5+1/5+1/5 = 1$

คำถามเรื่อง จะมีบอลกี่ลูกลงถังที่กำหนด คือ binomial dist. ถ้าโยนทั้งหมด n ครั้ง จะได้ค่า expectation = n/b

Practice: Probabilistic Analysis

- มีถัง 5 ใบ ให้หาว่าโดยเฉลี่ยแล้ว จะต้องโยนกี่ครั้งถึงจะมีบอลลงในถังใบที่ 2 (บอลลงครั้งแรก)
- I{โยนครั้งที่ i แล้วลูกบอลลงถังใบที่ 2} = 1 if บอลลงถังใบที่ 2

  0 if บอลไม่ลงถังใบที่ 2
- X_i = I{โยนครั้งที่ i แล้วลูกบอลลงถังใบที่ 2}
- Pr{โยนครั้งที่ 1 แล้วบอลลงถังใบที่ 2} = 1/5
- Pr{โยนครั้งที่ 2 แล้วบอลลงถังใบที่ 2}= 4/5.1/5
- Pr{โยนครั้งที่ 3 แล้วบอลลงถังใบที่ 2}= 4/5 . 4/5 .1/5
- X = จำนวนครั้งที่โยนแล้วบอลลงถังใบที่ 2
- E[X] = $\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}.1/5$ = 5

ความน่าจะเป็นที่จะไปลงถังอื่นๆที่ไม่ใช่ถังใบที่สอง

คำถามเรื่องจะต้องโยนบอลกี่ครั้งโดยเฉลี่ยเพื่อให้ลงถังที่เรากำหนด เป็น geometric dist ซึ่งมี expectation = b