

Ch7: Asymptotic Notations

305234

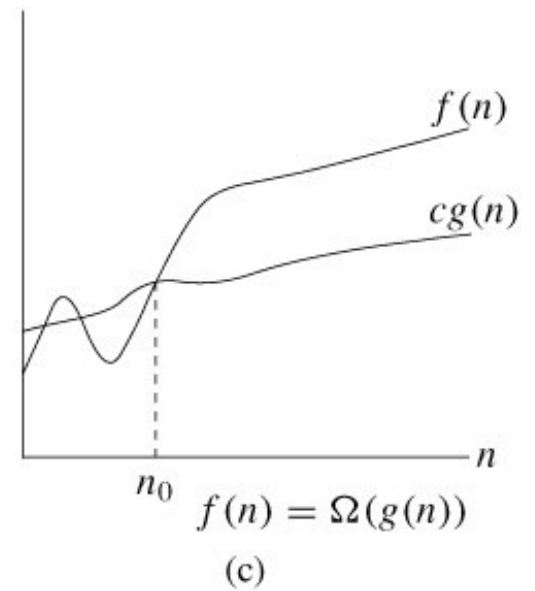
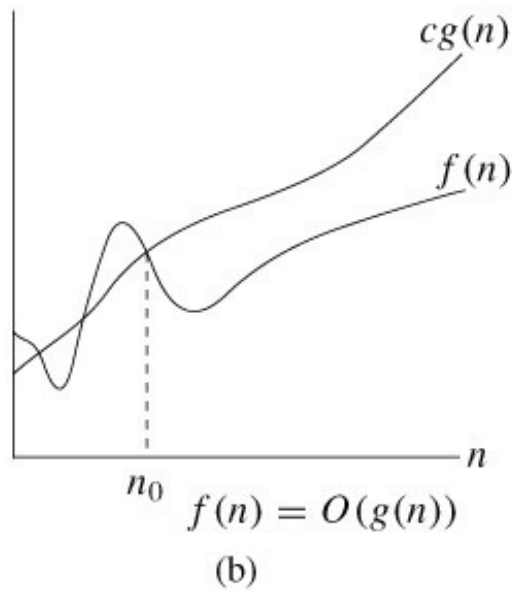
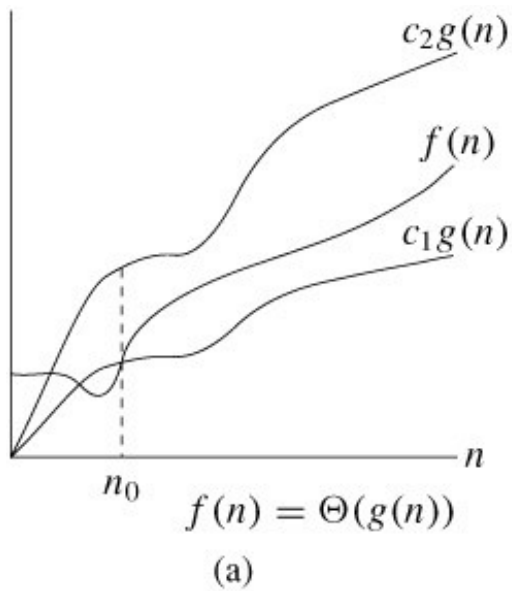
Algorithm Analysis and Design

Jiraporn Pooksook
Naresuan University

What is asymptotic notation?

- We are concerned with how the running time of an algorithm increases with the size of the input in the limit, as the size of the input increases without bound.
- We use it to describe running time of an algorithm which are defined in terms of functions whose domain are $N=\{0,1,2,3,\dots\}$
- Five asymptotic notations:
 - Big theta
 - Big O
 - Big Omega
 - Little O
 - Little omega

Examples of the Θ , O , Ω notations



Θ - Notations

- $\Theta(g(n)) = \{ f(n): \text{there exist positive constants } c_1, c_2, \text{ and } n_0 \text{ such that } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \text{ for all } n \geq n_0 \}$
- A function $f(n)$ belongs to the set if there exist positive constants c_1 and c_2 such that it can be “sandwiched” between $c_1 g(n)$ and $c_2 g(n)$, for sufficiently large n .

We write $f(n) = \Theta(g(n))$ to express $f(n) \in \Theta(g(n))$

Example: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ และ $g(n) = n^2$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in \Theta(g(n))$
- จากนิยามของ Θ เราต้องทำการหาค่า c_1 และ c_2 และ n_0 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน $f(n)$ และ $g(n)$ ลงไป

$$\text{จะได้ } 0 \leq c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2$$

$$\text{หารสมการทั้งหมดด้วย } n^2 \text{ จะได้ } 0 \leq c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$$

ถ้า $n > 6$ เมื่อไหร่ จะทำให้ $3/n$ ใกล้เคียง 0 ซึ่งจะทำให้ค่าของ $\frac{1}{2} - 3/n$ เกือบคงที่ที่ $\frac{1}{2}$ ดังนั้นถ้าเราเลือกค่า n ที่ ≥ 7 ค่า c_1 จะเป็นค่า $\leq 1/14$

ถ้า $n \geq 1$ แต่ $n < 6$ จะทำให้ค่าของ $\frac{1}{2} - 3/n$ ติดลบ เราก็ต้องเลือกค่า $c_2 \geq \frac{1}{2}$ (เพื่อที่จะได้ทำให้สมการเป็นบวก) พอ $n=6$ ก็จะได้ $c_2 \geq 0$ และเมื่อ $n \geq 7$ จะทำให้ $3/n$ ใกล้เคียง 0 ดังนั้นค่า c_2 จะ $\geq \frac{1}{2}$

Example: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า $n = 6$, c_1 จะมีค่า ≤ 0 และถ้า $n \geq 7$, $c_1 \leq 1/2$
- ได้ว่า ถ้า $n \geq 1$ ถึง $n < 6$, ค่า $\frac{1}{2} - 3/n$ ติดลบ และถ้า $n = 6$, $c_2 \geq 0$ และเมื่อ $n \geq 7$, $c_2 \geq 1/2$
- คำถามคือ ถ้าเช่นนั้น เราทำไมไม่เลือก c_1 ที่ $\frac{1}{2}$ และ $n \geq 6$ ลองมาแทนค่า สมการกันดู
- พิจารณากรณี c_1 ก่อน
- จะเห็นว่า สมการไม่เป็นจริง
- $36/2$ ไม่น้อยกว่า 0

$$c_1 n^2 \leq \frac{1}{2} n^2 - 3n \leq c_2 n^2$$

$$\frac{1}{2} (6)^2 \leq \frac{1}{2} (6)^2 - 3(6) \leq c_2 (6)^2$$

$$\frac{1}{2} \times 36 \leq 0 \leq c_2 \times 36$$

Example: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า $n = 6$, c_1 จะมีค่า ≤ 0 และถ้า $n \geq 7$, $c_1 \leq 1/2$
- ได้ว่า ถ้า $n \geq 1$ ถึง $n < 6$, ค่า $\frac{1}{2} - 3/n$ ติดลบ และถ้า $n = 6$, $c_2 \geq 0$ และเมื่อ $n \geq 7$, $c_2 \geq 1/2$
- ถ้าหากเราเลือก $n \geq 7$ และ c_1 ที่ $1/14$ ลองมาแทนค่า สมการกันดู
- จะเห็นว่า สมการเป็นจริง

$$c_1 n^2 \leq \frac{1}{2} n^2 - 3n \leq c_2 n^2$$

$$\frac{1}{14} (7)^2 \leq \frac{1}{2} (7)^2 - 3(7) \leq c_2 (7)^2$$

$$\frac{1}{14} \times 49 \leq \frac{49}{2} - 21 \leq c_2 \times 36$$

Example: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า $n = 6$, c_1 จะมีค่า ≤ 0 และถ้า $n \geq 7$, $c_1 \leq 1/2$
- ได้ว่า ถ้า $n \geq 1$ ถึง $n < 6$, ค่า $\frac{1}{2} - 3/n$ ติดลบ และถ้า $n = 6$, $c_2 \geq 0$ และเมื่อ $n \geq 7$, $c_2 \geq 1/2$
- สมมติถ้าหากเราเลือก $n \geq 7$ และ c_1 ที่ $1/2$ ลองมาแทนค่า สมการกันดู
- จะเห็นว่า สมการไม่เป็นจริง
- $49/2$ ไม่น้อยกว่า $49/2 - 21$

$$c_1 n^2 \leq \frac{1}{2} n^2 - 3n \leq c_2 n^2$$

$$\frac{1}{2} (7)^2 \leq \frac{1}{2} (7)^2 - 3(7) \leq c_2 (7)^2$$

$$\frac{1}{2} \times 49 \leq \frac{49}{2} - 21 \leq c_2 \times 36$$

Example: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = \frac{1}{2} n^2 - 3n$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า $n = 6$, c_1^2 จะมีค่า ≤ 0 และถ้า $n \geq 7$, $c_1 \leq 1/2$
- ได้ว่า ถ้า $n \geq 1$ ถึง $n < 6$, ค่า $\frac{1}{2} - 3/n$ ติดลบ และถ้า $n = 6$, $c_2 \geq 0$ และเมื่อ $n \geq 7$, $c_2 \geq 1/2$

- ที่นี้เรามาเลือก c_2 บ้าง ที่ $n \geq 1$ ถึง $n \leq 5$ จะแทนค่าสมการแล้วได้ติดลบหมด แต่ว่า เมื่อ $n \geq 7$ จะพบว่าค่าสมการลู่เข้าสู่ $\frac{1}{2}$ ดังข้อมูลด้านบน เนื่องจาก เราต้องเลือก c_2 ให้มากกว่าค่าคงที่ เราก็จะหาค่าคงที่ ที่ทำให้ c_2 มากกว่าเสมอไม่ว่า n จะเป็นอะไร

- พิจารณากรณี $c_2 \geq 1/2$

- จะเห็นว่า สมการเป็นจริง

$$c_1 n^2 \leq \frac{1}{2} n^2 - 3n \leq \frac{1}{2} (1)^2$$

$$c_1 (1)^2 \leq \frac{1}{2} (1)^2 - 3(1) \leq \frac{1}{2} (1)^2$$

$$c_1 \times 1 \leq -\frac{5}{2} \leq \frac{1}{2}$$

Example: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ และ $g(n)$

- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in \Theta(g(n))$

- จากนิยามของ Θ เราต้องทำการหาค่า c_1 และ c_2 สมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน $f(n)$ และ $g(n)$ ลงไป

- จะได้ $0 \leq c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2$

- หารสมการทั้งหมดด้วย n^2 จะได้ $0 \leq c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$

จะเห็นว่า $n \geq 1, c_2 \geq 1/2$

ส่วน $n \geq 7, c_1 \leq 1/14$

จะเห็นว่าเรามีเงื่อนไขค่า n สองค่า

สรุป เราก็เลือก $n_0 = 7$

เพื่อให้ทั้งสมการเป็นจริง ที่ทำให้

$$c_1 \leq 1/14, c_2 \geq 1/2$$

ก็จะทำให้พิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$$

Example: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 6n^3$ และ $g(n) = n^2$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in \Theta(g(n))$
- จากนิยามของ Θ เราต้องทำการหาค่า c_1 และ c_2 และ n_0 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง

พิสูจน์ได้ว่าไม่จริง

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน $f(n)$ และ $g(n)$ ลงไป
- จะได้ $0 \leq c_1 n^2 \leq 6n^3 \leq c_2 n^2$

หรือมองอีกมุมคือ ถ้าพิจารณา $6n \leq c_2$ เมื่อเราแทน $n=1$ จะได้ว่า c_2 มากกว่า 6 พอแทน $n=2$ ก็ต้องได้ c_2 มากกว่า 12 ซึ่งจะเห็นว่าเราไม่สามารถหาค่าคงที่สักค่าหนึ่ง ที่มากกว่าทุกกรณีของ n ให้กับ c_2 ได้เลย (ต้องระบุค่าคงที่ได้ว่า $c_2 >$ ค่าคงที่นั้นๆ)

- หารสมการทั้งหมดด้วย n^2 จะได้ $0 \leq c_1 \leq 6n \leq c_2$

ทำการหา c_1 เราลองแทน $n \geq 1$, $c_1 \leq 6$, พอ $n \geq 2$ จะได้ $c_1 \leq 12$ ทำไปเรื่อยๆ เราจะยังค่า c_1 ที่น้อยกว่า ค่าที่เปลี่ยนไปได้ เพราะว่า c_1 จะน้อยกว่า 6 (ต่ำสุด)

พิจารณา $6n \leq c_2$ ดังนั้น $n \leq c_2/6$ ถ้าหากว่า เราเลือกค่า n เป็นเลขจำนวนมาก ก็จะไม่สามารถมากกว่า $c_2/6$ ได้ ซึ่ง c_2 เป็นค่าคงที่ ก็จะไม่สามารถทำให้เรากำหนด n เป็นเลขมากๆ ได้ (เงื่อนไขคือ for all $n \geq n_0$)

Practice: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^4 - 4n$ และ $g(n) = n^2$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in \Theta(g(n))$
- จากนิยามของ Θ เราต้องทำการหาค่า c_1 และ c_2 และ n_0 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง
- $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน $f(n)$ และ $g(n)$ ลงไป
- จะได้ $0 \leq c_1 n^2 \leq 2n^4 - 4n \leq c_2 n^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย n^2 จะได้ $0 \leq c_1 \leq 2n^2 - \frac{4}{n} \leq c_2$

พิสูจน์ได้ว่าไม่
จริง

Practice: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^4 - 4n$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า $n = 1$, c_1 จะมีค่า < 0 และถ้า $n=2$, $c_1 \leq 6$ ถ้า $n=3$, $c_1 \leq 17$ ไปเรื่อยๆ
- คำถามคือ เราจะเลือก c_1 ที่เท่าไร เพื่อให้ สมการเป็นจริง ลองมาแทนค่า สมการกันดู ถ้าหากเลือก $n \geq 1$ แล้ว $c_1 \leq 6$
- พิจารณากรณี c_1 ก่อน
- จะเห็นว่า สมการไม่เป็นจริง
- 6 ไม่น้อยกว่า -2

$$c_1 n^2 \leq 2n^4 - 4n \leq c_2 n^2$$

$$6(1)^2 \leq 2(1)^4 - 4(1) \leq c_2(1)^2$$

$$6 \times 1 \leq -2 \leq c_2 \times 1$$

Practice: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^4 - 4n$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า $n = 1$, c_1 จะมีค่า < 0 และถ้า $n=2$, $c_1 \leq 6$ ถ้า $n=3$, $c_1 \leq 17$ ไปเรื่อยๆ
- ถ้าเราเลือก $n \geq 2$ แล้ว $c_1 \leq 6$
- พิจารณากรณี c_1 ก่อน
- จะเห็นว่า สมการเป็นจริง
- 24 เท่ากับ 24

$$c_1 n^2 \leq 2n^4 - 4n \leq c_2 n^2$$

$$6(2)^2 \leq 2(2)^4 - 4(2) \leq c_2 (2)^2$$

$$6 \times 4 \leq 24 \leq c_2 \times 2$$

Practice: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^4 - 4n$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า $n = 1$, c_1 จะมีค่า < 0 และถ้า $n=2$, $c_1 \leq 6$ ถ้า $n=3$, $c_1 \leq 17$ ไปเรื่อยๆ
- ถ้าเราเลือก $n > 2$ ($n \geq 3$) แล้ว $c_1 \leq 6$
- พิจารณากรณี c_1 ก่อน
- จะเห็นว่า สมการเป็นจริง
- 54** น้อยกว่า **130**

$$c_1 n^2 \leq 2n^4 - 4n \leq c_2 n^2$$

$$6(3)^2 \leq 2(3)^4 - 4(3) \leq c_2(3)^2$$

$$6 \times 9 \leq 130 \leq c_2 \times 9$$

Practice: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^4 - 4n$ และ $g(n) = n^2$
- ได้ว่า ถ้า $n=1$, $c_2 \geq -2$ และเมื่อ $n=2$, $c_2=2$ เมื่อ $n \geq 3$, $c_2 \geq 17$ จะเห็นว่า เราสามารถเลือก เมื่อ $n \geq 1$, $c_2 \geq 2$ ได้
- เรามาลองทดสอบแทนค่าสมการดู หาก
- พิจารณากรณี $n \geq 1$, $c_2 \geq 2$ $c_1 n^2 \leq 2n^4 - 4n \leq 2(1)^2$
- จะเห็นว่า สมการไม่เป็นจริง $c_1(1)^2 \leq 2(1)^4 - 4(1) \leq 2(1)^2$
- 12 ไม่ได้น้อยกว่า 2 $c_1 \times 1 \leq 12 \leq 2$

Practice: Θ - Notations

กำหนดให้ $f(n) = 2n^4 - 4n$ และ $g(n) = n^2$

ได้ว่า ถ้า $n=1$, $c_2 \geq -2$ และเมื่อ $n=2$, $c_2 \geq 17$ จะเห็นว่า

สมมติว่า พิจารณากรณี $n \geq 2$, $c_2 \geq 2$

จะเห็นว่า สมการไม่เป็นจริง

24 ไม่ได้น้อยกว่า 8

ต่อให้เราเปลี่ยนค่า c_2 ให้มากขึ้นอีก

แต่ว่า ค่าของสมการตรงกลาง

ก็จะยังมากกว่า ค่า c_2 ที่เราเลือกอยู่ดี

จะเห็นว่า เราสามารถหาค่าคงที่
ให้ c_1 ได้แต่ทำให้ c_2 ไม่ได้
ดังนั้น สรุปได้ว่า $g(n)$ ไม่ได้เป็น
big theta ของ $f(n)$

$$c_1 n^2 \leq 2n^4 - 4n \leq 2(2)^2$$

$$c_1 (1)^2 \leq 2(2)^4 - 4(2) \leq 2(2)^2$$

$$c_1 \times 1 \leq 24 \leq 8$$

Practice: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^2 - 4n$ และ $g(n) = n^2$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in \Theta(g(n))$
- จากนิยามของ Θ เราต้องทำการหาค่า c_1 และ c_2 และ n_0 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน $f(n)$ และ $g(n)$ ลงไป

$$\text{จะได้ } 0 \leq c_1 n^2 \leq 2n^2 - 4n \leq c_2 n^2$$

$$\text{หารสมการทั้งหมดด้วย } n^2 \text{ จะได้ } 0 \leq c_1 \leq 2 - \frac{4}{n} \leq c_2$$

หาค่า c_1 เราลองแทน $n=1, c_1=-2$ ถ้า $n=2, c_1=0$ ถ้า $n>4$, ค่าของ $4/n$ จะเข้าสู่ 0 ดังนั้นจะทำให้ $c_1 \leq 2$ เราจะสรุปได้ว่า เมื่อ $n \geq 5$ เราจะเลือก $c_1 \leq 2$

ถ้า $n=1, c_2=-2$ เราก็ต้องเลือกค่า $c_2 \geq 2$ (เพื่อที่จะได้ทำให้สมการเป็นบวก) ถ้า $n=2, c_2=0$, ถ้า $n=4, c_2=2$ ดังนั้นสรุปได้ว่าเราจะเห็นว่า ถ้า $n \geq 1$ เราจะเลือก $c_2 \geq 2$

Practice: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^2 - 4n$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า $n=1$ หรือ $n=2$, c_1 จะมีค่า ≤ 0 และถ้า $n>4$, $c_1 \leq 2$
- ได้ว่า ถ้า $n=1$ ค่า c_2 ติดลบ และถ้า $n=2$, $c_2 \geq 0$ และเมื่อ $n>4$, $c_2 \geq 2$
- คำถามคือ ถ้าเช่นนั้น ลองเลือก c_1 ที่ 2 และ $n \geq 4$ ลองมาแทนค่า สมการกันดู
- พิจารณากรณี c_1 ก่อน
- จะเห็นว่า สมการไม่เป็นจริง
- 36 ไม่น้อยกว่า 16

$$c_1 n^2 \leq 2n^2 - 4n \leq c_2 n^2$$

$$2(4)^2 \leq 2(16) - 16 \leq c_2 (4)^2$$

$$32 \leq 16 \leq c_2 \times 16$$

ถ้าเลือก $c_1=1$,
 $n \geq 4$ หรือ
ถ้าเลือก $c_1=0$,
 $n \geq 2$
สมการจะเป็น
จริง

Practice: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^2 - 4n$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า $n=1$ หรือ $n=2$, c_1 จะมีค่า ≤ 0 และถ้า $n>4$, $c_1 \leq 2$
- ได้ว่า ถ้า $n=1$ ค่า c_2 ติดลบ และถ้า $n=2$, $c_2 \geq 0$ และเมื่อ $n>4$, $c_2 \geq 2$
- สมมติ ถ้าเช่นนั้น ลองเลือก c_1 ที่ $6/5$ และ $n \geq 5$ ลองมาแทนค่า สมการกันดู

- พิจารณากรณี c_1 ก่อน
- จะเห็นว่า สมการเป็นจริง
- 30 เท่ากับ 30

$$c_1 n^2 \leq 2n^2 - 4n \leq c_2 n^2$$

$$\frac{6}{5}(5)^2 \leq 2(25) - 20 \leq c_2(5)^2$$

$$30 \leq 30 \leq c_2 \times 25$$

Practice: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^2 - 4n$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า $n=1$ หรือ $n=2$, c_1 จะมีค่า ≤ 0 และถ้า $n>4$, $c_1 \leq 2$
- ได้ว่า ถ้า $n=1$ ค่า c_2 ติดลบ และถ้า $n=2$, $c_2 \geq 0$ และเมื่อ $n>4$, $c_2 \geq 2$
- เพื่อเป็นการทดสอบ ลองเลือก c_1 ที่ $6/5$ และแทน $n=6$ บ้าง
- พิจารณากรณี c_1 ก่อน
- จะเห็นว่า สมการเป็นจริง
- 23 น้อยกว่า 52

$$c_1 n^2 \leq 2n^2 - 4n \leq c_2 n^2$$

$$\frac{6}{5}(6)^2 \leq 2(36) - 20 \leq c_2(6)^2$$

$$\frac{216}{5} \leq 52 \leq c_2 \times 36$$

ก็จะพบว่า
 $c_1 \leq 6/5$
และ $n \geq 5$
เป็นจริง

O - Notations

- $O(g(n)) = \{ f(n): \text{there exist positive constants } c \text{ and } n_0 \text{ such that } 0 \leq f(n) \leq c g(n) \text{ for all } n \geq n_0 \}$
- We use O-notation when we have only an asymptotic upper bound (the worst case running time).
- Hence if we have $f(n) = \Theta(g(n))$
- then it follows that $f(n) = O(g(n))$

Example: O - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n^2$ และ $g(n) = n^2$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in O(g(n))$
- จากนิยามของ **O** เราต้องทำการหาค่า **c** และ **n₀** ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง
- $0 \leq f(n) \leq cg(n)$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน **f(n)** และ **g(n)** ลงไป
- จะได้ $0 \leq 3n^2 \leq cn^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย n^2 จะได้ $0 \leq 3 \leq c$

ซึ่งเราก็เลือกค่า **c** ที่ ≥ 3 ได้ และ $n \geq 1$ เพราะค่า **n** จะเป็นอะไรก็ได้ไม่มีผลอยู่แล้ว

Example: O - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n + 5$ และ $g(n) = n^2$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in O(g(n))$
- จากนิยามของ **O** เราต้องทำการหาค่า **c** และ **n₀** ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง
- $0 \leq f(n) \leq cg(n)$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน **f(n)** และ **g(n)** ลงไป
- จะได้ $0 \leq 3n + 5 \leq cn^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย **n** จะได้ $0 \leq 3 + \frac{5}{n} \leq cn$

สมมติถ้าให้ค่า **n** ที่ = 1 จะได้ $c \geq 8$, **n** ที่ = 2 จะได้ $c \geq 11/4$
n=3, $c \geq 14/9$, และ **n**=5, $c \geq 1$ และจะเห็นว่าเมื่อ **n** ≥ 6 , $c \geq 3/n$ ดังนั้นแสดงว่า $c > 0$ แน่ๆ เมื่อ **n** ≥ 6

Example: O - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n + 5$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า $c = 1, n \geq 3$ และถ้า $c=2, n \geq 3/2$ ถ้า $c=3, n \geq 4/3$ ไปเรื่อยๆ
- สมมติเราทดสอบสมการด้วยการเลือก $c \geq 1, n \geq 3$
- จะเห็นว่า สมการไม่เป็นจริง $3n + 5 \leq c n^2$
- **14** ไม่น้อยกว่า **9** $3(3) + 5 \leq 1(3)^2$
 $14 \leq 1 \times 9$

Example: O - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n + 5$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า $c = 1, n \geq 3$ และถ้า $c=2, n \geq 3/2$ ไปเรื่อยๆ
- ที่นี่เราลองเลือก $c = 1, n > 3$ ($n \geq 4$)
- จะเห็นว่า สมการไม่เป็นจริง
- **17** ไม่น้อยกว่า **16**

$$3n + 5 \leq c n^2$$

$$3(4) + 5 \leq 1(4)^2$$

$$17 \leq 1 \times 16$$

Example: O - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n + 5$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า $c = 1, n \geq 3$ และถ้า $c=2, n \geq 3/2$ ไปเรื่อยๆ
- ที่นี่เราลองเลือก $c = 1, n \geq 5$
- จะเห็นว่า สมการเป็นจริง
- **20** น้อยกว่า **25**

$$3n + 5 \leq c n^2$$

$$3(5) + 5 \leq 1(5)^2$$

$$20 \leq 1 \times 25$$

Example: O - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n + 5$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า $c = 1, n \geq 3$ และถ้า $c=2, n \geq 3/2$ ไปเรื่อยๆ
- ที่นี่เราลองเลือก $c \geq 0, n \geq 6$ (จากแนวโน้มที่เราเห็นว่า c เข้าใกล้ 0 เมื่อ n มากกว่า 6)
- จะเห็นว่า สมการไม่เป็นจริง $3n + 5 \leq c n^2$
- เราจะใช้ $c=0$ ไม่ได้เนื่องจาก $3(6) + 5 \leq 0(6)^2$
- ค่าฝั่งขวาจะกลายเป็น 0 หมด $23 \leq 0$
- ซึ่งเรากำลังเทียบว่าฝั่งซ้ายน้อยกว่า
- ทำให้เราไม่สามารถหาค่าฝั่งซ้ายที่ < 0 ได้
- เพราะฉะนั้นต้องเลือก $c \geq 1, n \geq 5$

o - Notations

- $o(g(n)) = \{ f(n): \text{for any positive constant } c > 0, \text{ there exists a constant } n_0 > 0 \text{ such that } 0 \leq f(n) < c g(n) \text{ for all } n \geq n_0 \}$

Example: o - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n$ และ $g(n) = n^2$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in o(g(n))$
- จากนิยามของ **little o** เราต้องทำการหาค่า c และ n_0 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง สำหรับทุกๆค่า $c > 0$
- $0 \leq f(n) < cg(n)$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน $f(n)$ และ $g(n)$ ลงไป
- จะได้ $0 \leq 2n < cn^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย n จะได้ $0 \leq 2 < cn$

ซึ่งถ้าเราเลือกค่า c ที่ $=1$ จะได้ $n > 2$ ดังนั้น $n_0 > 2$

ถ้าเราเลือกค่า c ที่ $=2$ จะได้ $n > 1$ ดังนั้น $n_0 > 1$

เพราะฉะนั้นเราสามารถหาค่า c ได้เรื่อยๆ

ถ้า $c = k$ ใดๆ เราก็จะหาค่า n ได้ที่ $2/k$

Example: o - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n$ และ $g(n) = n^2$
 - เราได้ว่า ถ้า $c = 1, n > 2$ และถ้า $c=2, n > 1$ ไปเรื่อยๆ คือ ถ้า $c = k, n > 2/k$
 - สมมติเราทดสอบสมการด้วยการเลือก $c = 1, n \geq 3$
 - จะเห็นว่า สมการเป็นจริง
 - 6 น้อยกว่า 9
 - แต่หาก เลือก $c=1, n \geq 2$
 - สมการจะไม่เป็นจริง
 - 4 ไม่น้อยกว่า 4
 - เพราะฉะนั้นต้องเลือก $c \geq 1, n > 2$
- $$2n \leq c n^2$$
- $$2(3) \leq 1(3)^2$$
- $$6 \leq 9$$

Example: o - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n^2$ และ $g(n) = n^2$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in o(g(n))$
- จากนิยามของ **little o** เราต้องทำการหาค่า c และ n_0 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง
- $0 \leq f(n) < cg(n)$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน $f(n)$ และ $g(n)$ ลงไป
- จะได้ $0 \leq 3n^2 < cn^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย n^2 จะได้ $0 \leq 3 < c$

พิสูจน์ได้ว่าไม่จริง

ซึ่งเราจะได้ค่า c ที่ > 3 แต่ตามนิยามของ **little o** บอกไว้ว่า สำหรับค่า c ใดๆ ที่ > 0 (ซึ่งเราแทน $c = 1$ ไม่ได้ในกรณีนี้) ก็จะมีค่า n ที่ทำให้ $f(n) \geq cg(n)$ พบว่า เราไม่สามารถพิสูจน์ได้

O-notations vs. o-notations

- จะเห็นว่า **O – notations** จะครอบคลุมกรณีมากกว่า คือ ถ้าเราวิเคราะห์สมการเวลาไว้ **tight** ก็ได้ หรือจะไม่ **tight bound** ก็ได้
- แต่ว่า **o – notations** จะครอบคลุมเฉพาะกรณีที่ ไม่ **tight bound**
- **Tight bound** คือกรณีที่สมการไม่ฟิตกัน อาจจะเป็นเพราะเรา **over estimate** เช่น กรณี $f(n) = 2n$ และ $g(n) = n^2$
- แล้วเราจะหาว่า $f(n) \in o(g(n))$
- จะหาด้วย **little-o** ได้เพราะว่า ไม่ **tight bound**
- ดังนั้น ถ้าสมการ ไม่ **tight bound** เราจะพบค่า **little o** ของมัน และ **big o** ของมันด้วย

Ω - Notations

- $\Omega(g(n)) = \{ f(n): \text{there exist positive constants } c \text{ and } n_0 \text{ such that } 0 \leq c g(n) \leq f(n) \text{ for all } n \geq n_0 \}$
- We use Ω -notation when we have only an asymptotic lower bound (the best case running time).
- Hence if we have $f(n) = \Theta(g(n))$
- then it follows that $f(n) = \Omega(g(n))$

Example: Ω - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n^2$ และ $g(n) = n$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in \Omega(g(n))$
- จากนิยามของ Ω เราต้องทำการหาค่า c และ n_0 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง
- $0 \leq c g(n) \leq f(n)$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน $f(n)$ และ $g(n)$ ลงไป
- จะได้ $0 \leq cn \leq 3n^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย n^2 จะได้ $0 \leq \frac{c}{n} \leq 3$

ถ้า $n = 1$ แล้วให้ $c \leq 3$ ถ้า $n=2$ แล้ว $c \leq 6$, $n=3$, $c \leq 9$
ต่อไปเรื่อยๆ จะเห็นว่า เราสามารถหาค่าคงที่ ให้ c ที่ทำให้น้อยกว่า ก็จะได้ว่า $n_0 \geq 1$, $c \leq 3$

Example: Ω - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n^2$ และ $g(n) = n$
- เราได้ว่า ถ้า $n = 1, c \leq 3$ และถ้า $n=2, c \leq 6$ ไปเรื่อยๆ
- ที่นี้เราลองเลือก $c = 3, n = 1$
- จะเห็นว่า สมการเป็นจริง
- 3 เท่ากับ 3
- แต่หากเลือก $c > 3, n = 1$ จะพบว่าสมการไม่เป็นจริง

$$c n \leq 3 n^2$$

$$3(1) \leq 3(1)$$

$$3 \leq 3$$

$$c n \leq 3 n^2$$

$$4(1) \leq 3(1)$$

$$4 \leq 3$$

Example: Ω - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n^2$ และ $g(n) = n^2$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in \Omega(g(n))$
- จากนิยามของ Ω เราต้องทำการหาค่า c และ n_0 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง
- $0 \leq c g(n) \leq f(n)$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน $f(n)$ และ $g(n)$ ลงไป
- จะได้ $0 \leq cn^2 \leq 3n^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย n^2 จะได้ $0 \leq c \leq 3$

เราก็ได้ว่า $c \leq 3$ ดังนั้น c เป็นเลขอะไรก็ได้ที่น้อยกว่า 3 ส่วน n จะเป็นเท่าไรก็ได้ เพราะสมการที่เหลือไม่ขึ้นกับ n

ω - Notations

- $\omega(g(n)) = \{ f(n): \text{for any positive constants } c > 0 \text{ and } n_0 \text{ such that } 0 \leq cg(n) < f(n) \text{ for all } n \geq n_0 \}$

Example: ω - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n^2$ และ $g(n) = n$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in \omega(g(n))$
- จากนิยามของ ω เราต้องทำการหาค่า c และ n_0 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง
- $0 \leq cg(n) < f(n)$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน $f(n)$ และ $g(n)$ ลงไป
- จะได้ $0 \leq cn < 3n^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย n^2 จะได้ $0 \leq \frac{c}{n} < 3$

ถ้าหาก $c=3$ เราก็จะได้ค่า $n > 1$ เพื่อให้ พจน์ c/n มันน้อยกว่า 3 ตามสมการ
สมมติ $c=1$ เราก็จะได้ค่า $n > 1$ เช่นกัน(หารแล้วปัดขึ้น) เราก็สามารถหาค่า c ได้ทุกตัว ที่ทำให้ หาค่า n
ได้

Example: ω - Notations

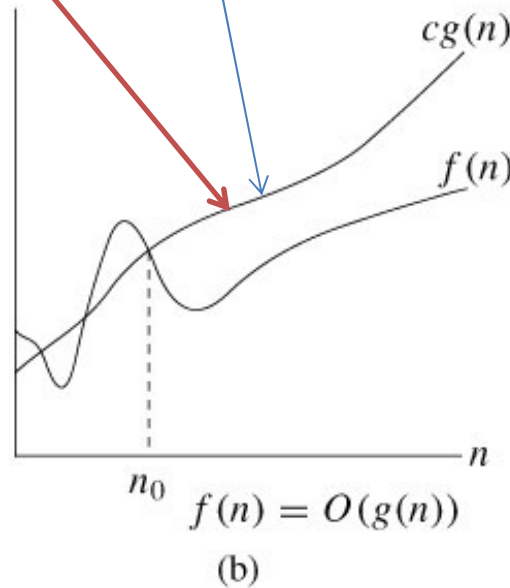
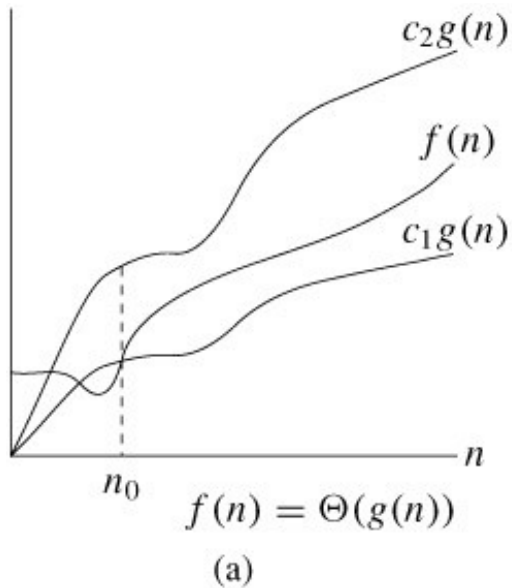
- กำหนดให้ $f(n) = 3n^2$ และ $g(n) = n^2$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in \omega(g(n))$
- จากนิยามของ ω เราต้องทำการหาค่า c และ n_0 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง
- $0 \leq c g(n) < f(n)$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน $f(n)$ และ $g(n)$ ลงไป
- จะได้ $0 \leq cn^2 < 3n^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย n^2 จะได้ $0 \leq c < 3$

พิสูจน์ได้ว่าไม่จริง

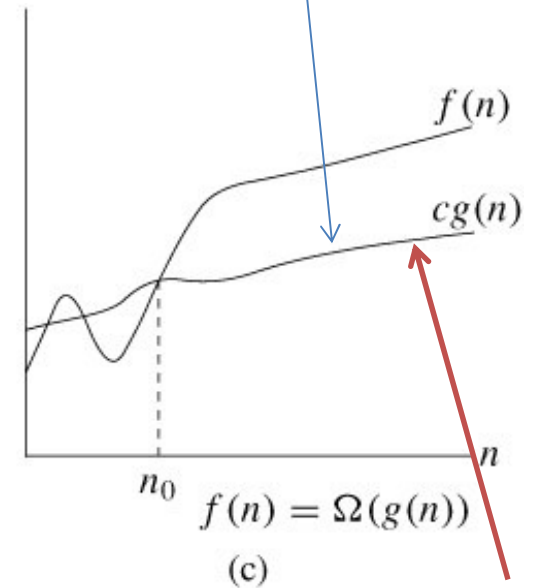
ก็จะได้ค่า $c < 3$ แต่ไม่ตรงกับนิยาม เพราะนิยามบอกว่า สำหรับ c ใดๆ ที่มากกว่า 0 ดังนั้นกรณีนี้ เราจะแทนค่า $c=1$ ก็ไม่ได้

Example of the $\Theta, O, o, \Omega, \omega$ notations

ถ้าไม่ tight
 $f(n) = o(g(n))$ Upper bound



Lower bound



ถ้าไม่ tight
 $f(n) = \omega(g(n))$

Practice: $\Theta, O, o, \Omega, \omega$ Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^4 - 4n$ และ $g(n) = n^2$

Practice: $\Theta, O, o, \Omega, \omega$ Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^2 - 4n$ และ $g(n) = n^2$

Standard notations and common functions

- Monotonicity
- A function $f(n)$ is **monotonically increasing** if $m \leq n$ implies $f(m) \leq f(n)$.
- A function $f(n)$ is **monotonically decreasing** if $m \leq n$ implies $f(m) \geq f(n)$.
- A function $f(n)$ is **strictly increasing** if $m < n$ implies $f(m) < f(n)$ and **strictly decreasing** if $m < n$ implies $f(m) > f(n)$.

Standard notations and common functions

- Floor and ceilings
- For all real x , $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x+1$
- For any integer n , $\lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor = n$
- For any real number $n \geq 0$ and integers $a, b > 0$,
$$\lceil \lceil n/a \rceil / b \rceil = \lceil n/ab \rceil$$
$$\lfloor \lfloor n/a \rfloor / b \rfloor = \lfloor n/ab \rfloor$$
$$\lceil a/b \rceil \leq (a + (b - 1)) / b$$
$$\lfloor a/b \rfloor \geq (a - (b - 1)) / b$$
- The floor function $f(x) = \lfloor x \rfloor$ is monotonically increasing, as is the ceiling function $f(x) = \lceil x \rceil$.

Standard notations and common functions

- Modular arithmetic :

$$a \bmod n = a - \lfloor a/n \rfloor n$$

- Polynomials:

$$p(n) = \sum_{i=0}^d a_i n^i$$

- We say that a function $f(n)$ is polynomially bounded if $f(n) = O(n^k)$ for some constant k .

Standard notations and common functions

- Exponentials : for all real $a > 0$, m and n , we have the following identities:

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{-1} = 1 / a$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(a^m)^n = (a^n)^m$$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

- For all n and $n \geq 1$, the function a^n is monotonically increasing in n .

Standard notations and common functions

- The rate of growth of polynomials and exponentials for all real constants a, b such that $a > 1$, any **exponential function with a base strictly greater than 1 grows faster than any polynomial function.**

- Using e to denote the base of the natural logarithm function, we have for all real x :

- For all real x , we have : $e^x \geq 1 + x$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + x + x^2$$

Standard notations and common functions


- Logarithms: we shall use the following notations:

$$\lg n = \log_2 n$$

$$\ln n = \log_e n$$

$$\lg^k n = (\lg n)^k$$

$$\lg \lg n = \lg(\lg n)$$



Binary logarithm
Natural logarithm
Exponentiation
Composition

- We say that a function $f(n)$ is polylogarithmically bounded if $f(n) = O(\lg^k n)$ for some constant k .
- Thus any positive **polynomial function grows faster than any polylogarithmic function.**

Standard notations and common functions

- Factorial: for integers $n \geq 0$

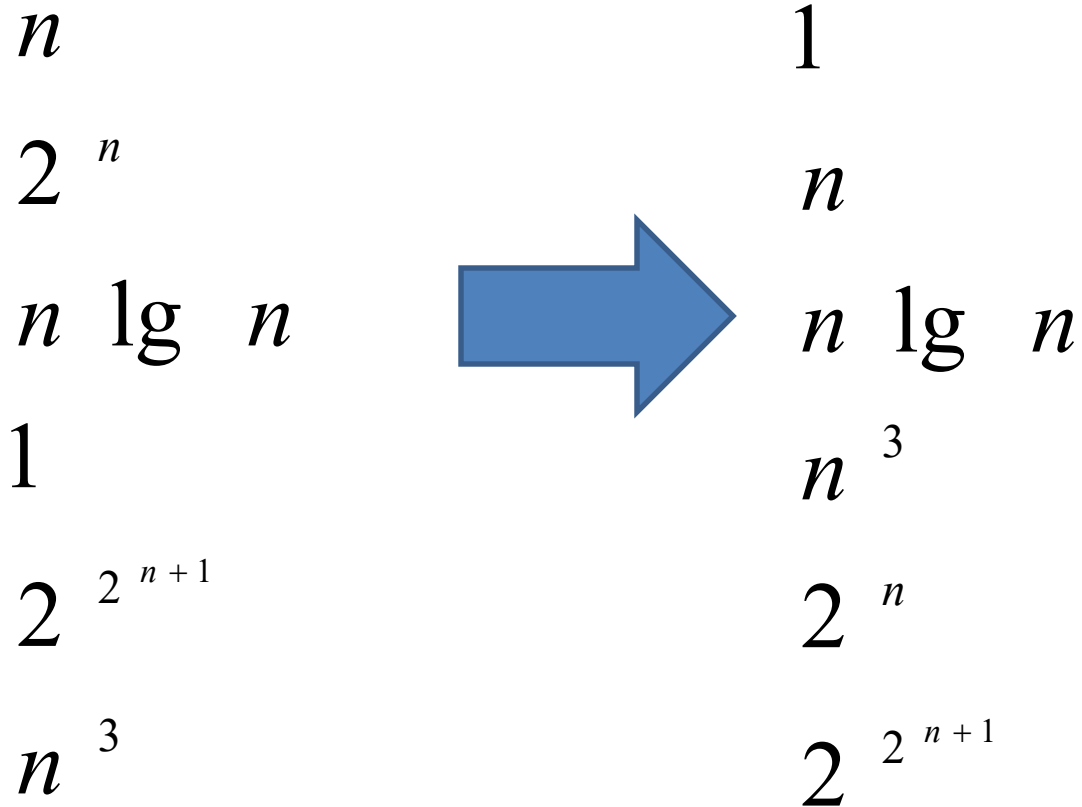
$$n! = o(n^n)$$

$$n! = \omega(2^n)$$

$$\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$$

Practice: asymptotic growth rates

- Rank the following functions by order of growth.



Asymptotic growth rates

Important Complexity Classes

These are common functions for big- O from least to greatest:

$1, \log n, n, n \log n, n^2, 2^n, n!$

