

Ch10: Analyzing Randomized Algorithms

305233, 305234

Algorithm Analysis and Design

Jiraporn Pooksook
Naresuan University

Indicator Random Variables

- The **indicator random variable** $I\{A\}$ associated with event A is defined as:
- $I\{A\} = \begin{cases} 1 & \text{if } A \text{ occurs,} \\ 0 & \text{if } A \text{ does not occur} \end{cases}$
- For example, let us determine the expected number of heads we obtain when flipping a fair coin. $S = \{H, T\}$, with $\Pr\{H\} = \Pr\{T\} = 1/2$.
- We define an indicator random variable X_H , associated with the coin coming up heads, which is the event H .
- $X_H = I\{H\} = \begin{cases} 1 & \text{if } H \text{ occurs} \\ 0 & \text{if } T \text{ occurs} \end{cases}$
- The expected number of heads obtain in one flip is then the expected value of X_H :
$$E[X_H] = E [I\{H\}] = 1 \cdot \Pr\{H\} + 0 \cdot \Pr\{T\}$$
$$= 1 \cdot (1/2) + 0 \cdot (1/2) = 1/2$$

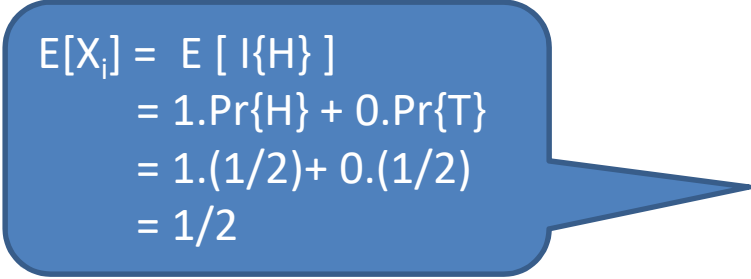
Lemma: give a sample space S and an event A in S , let $X_A = I\{A\}$.
Then $E[X_A] = \Pr\{A\}$.

Indicator Random Variables

- For example, we find the number of heads in n coin flips.
- Let X_i be the indicator random variable.
- $X_i = I\{H\} = 1$ if H occurs in the i^{th} flip
0 if T occurs in the i^{th} flip
- Let X be the indicator random variable denoting the total number of heads in the n coin flips.

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

- Therefore the expectation is


$$\begin{aligned} E[X_i] &= E[I\{H\}] \\ &= 1 \cdot \Pr\{H\} + 0 \cdot \Pr\{T\} \\ &= 1 \cdot (1/2) + 0 \cdot (1/2) \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X] &= E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} = n/2 \end{aligned}$$

Analyzing The Hiring Problem

- Let X_i be the indicator random variable associated with the event in which the i^{th} candidate is hired.
- $X_i = I\{\text{candidate } i \text{ is hired}\}$
= 1 if candidate i is hired,
0 if candidate i is not hired
- and $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.
- From lemma, $E[X_i] = \Pr\{\text{candidate } i \text{ is hired}\}$

Analyzing The Hiring Problem

- Considering a candidate i is hired when candidate i is better than each of candidates 1 to $i-1$. Thus, candidate i has a probability of $1/i$ of being better qualified than candidates 1 to $i-1$ and thus, a probability of $1/i$ of being hired.
- From lemma, $E[X_i] = \Pr\{\text{candidate } i \text{ is hired}\}$
- We can conclude $E[X_i] = 1/i$

Analyzing The Hiring Problem

- Now we can compute $E[X]$:

$$\begin{aligned} E[X] &= \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^n [X_i] \\ &= \sum_{i=1}^n 1/i \\ &= \ln n + O(1) \end{aligned}$$

If we interview n people, we only hire approximately $\ln n$ of them on average.

Lemma:

Assuming that the candidates are presented in a random order, algorithm Hire-Assistant has a total hiring cost of $O(c_h \ln n)$.

The Hiring Problem

Pseudo code: Randomized-Hire-Assistant(n)

randomly permute the list of candidates

best = 0 // dummy candidate

for i = 1 to n

 do interview candidate i

 if candidate i is better than candidate best

 then best = i

 hire candidate i

Randomly permuting arrays

- We randomize the input by permuting the give input array.
- We assign each element $A[i]$ of the array a random priority $P[i]$, and then sort the elements of A according to these priorities.

| A | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|----|---|----|----|
| P | 36 | 3 | 97 | 19 |

- Then we would produce an array $B = [2,4,1,3]$

Randomization method: Permute By Sorting

Pseudo code: Permute-By-Sorting(A)

N = length[A]

for i = 1 to n

 do P[i] = Random(1,n³)

sort A, using P as sort keys

return A

Randomization method: Permute By Sorting

- We use a range of 1 to n^3 to make it likely that all the properties in P are unique.
- The time consuming step is in line 4. If we use merge sort , it takes $\Theta(n \lg n)$ time.

Randomization method: Permute By Sorting

Lemma:

procedure Permute-By-Sorting produces a uniform random permutation of the input, assuming that all priorities are distinct.

- Let X_i be the event that element $A[i]$ receives the i th smallest priority.
- We have $\Pr\{X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_{n-1} \cap X_n\} = \Pr\{X_1\} \cdot \Pr\{X_2 | X_1\} \cdot \Pr\{X_3 | X_1 \cap X_2\} \dots \Pr\{X_n | X_1 \cap \dots \cap X_{n-1}\}$
- We have $\Pr\{X_1\} = 1/n$ and $\Pr\{X_2 | X_1\} = 1/(n-1)$, and so on
- We have that $\Pr\{X_i | X_1 \cap \dots \cap X_{i-1}\} = 1/(n-i+1)$
- Hence,
$$\Pr\{X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_{n-1} \cap X_n\} = (1/n) \cdot (1/n-1) \dots (1/2) \cdot (1/1) = 1/n!$$

Prob. ที่อาเรย์
ตำแหน่ง i จะได้ค่า
priority น้อยสุด

Randomization method: Randomize-in-place

- Another method for generating a random permutation is to permute the given array in place. The procedure Randomize-in-place does in $O(n)$ time.

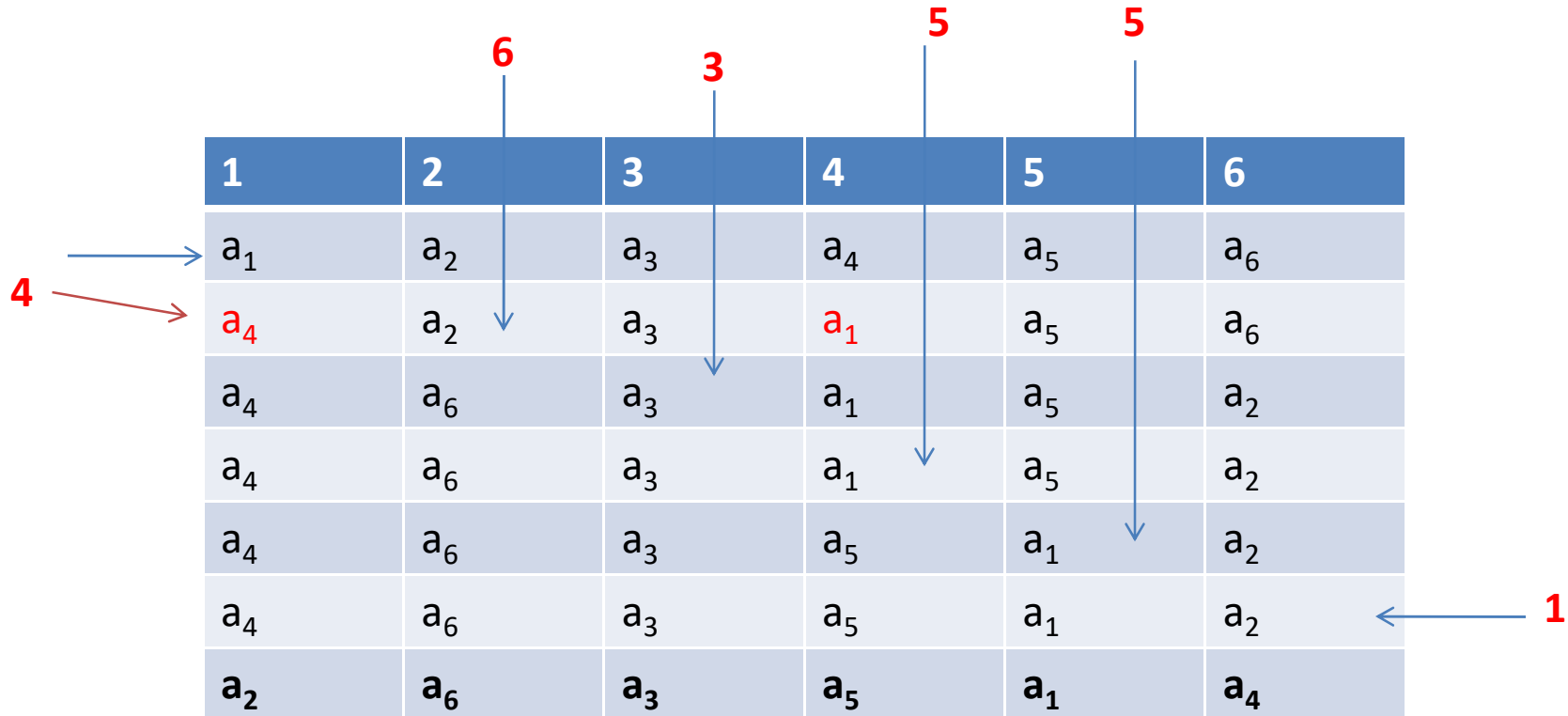
Pseudo code: Randomize-In-Place(A)

$N = \text{length}[A]$

for $i = 1$ to n

 do swap ($A[i]$, $A[\text{Random}(1,n)]$)

Randomization method: Randomize-in-place



Randomization method: Randomize-In-Place

Lemma:

procedure Permute-By-Sorting produces a uniform random permutation of the input, assuming that all priorities are distinct.

- จากตัวอย่าง วิเคราะห์ความน่าจะเป็นที่จะเกิด **output** ตัวเลขในแบบอื่นๆ
- รอบที่ 1 โอกาสที่จะเลือก มี = $1/6$
- รอบที่ 2 โอกาสที่จะเลือก มี = $1/5$
- รอบที่ 3 โอกาสที่จะเลือก มี = $1/4$
- รอบที่ 4 โอกาสที่จะเลือก มี = $1/3$
- รอบที่ 5 โอกาสที่จะเลือก มี = $1/2$
- รอบที่ 6 โอกาสที่จะเลือก มี = 1
- ดังนั้น **probability** ที่จะเกิดแต่ละ **output** = $1/6 \cdot 1/5 \cdot 1/4 \cdot 1/3 \cdot 1/2 \cdot 1$
= $1/720$

Randomization method: Randomize-In-Place

Lemma:

procedure Permute-By-Sorting produces a uniform random permutation of the input, assuming that all priorities are distinct.

- Given a set of n elements, a k -permutation is a sequence containing k of n elements. There are $n!/(n-k)!$ possible k -permutations.
- Therefore, for each possible $(i-1)$ permutation, we assume that the subarray $A[1..i-1]$ contains this permutation with probability $(n-i+1)!/n!$
- Let $\Pr\{X_1\} = (n-i+1)!/n!$ and X_2 be the event that i th iteration plus x_i in position $A[i]$. Then the i -permutation (x_1, \dots, x_i) is formed in $A[1..i]$ when both X_1 and X_2 occur.

Randomization method: Randomize-In-Place

Lemma:

procedure Permute-By-Sorting produces a uniform random permutation of the input, assuming that all priorities are distinct.

- We have $\Pr\{X_1 \cap X_2\} = \Pr\{X_1\} \cdot \Pr\{X_2 | X_1\}$.
- The probability of $\Pr\{X_2 | X_1\} = 1 / (n-i+1)!$
- Thus we have $\Pr\{X_1 \cap X_2\} = \Pr\{X_1\} \cdot \Pr\{X_2 | X_1\}$
 $= 1 / (n-i+1)! \cdot (n-i+1)! / n!$
 $= (n-i)! / n!$

For subarray $A[1..n]$ which is n -permutation with probability $(n-n)! / n! = 1/n!$

Example : Probabilistic Analysis

- โยนเหรียญหนึ่งเหรียญ ซึ่งเป็นเหรียญที่มีความน่าจะเป็นที่จะออกหัว และ ก้อย เท่าๆกัน พนันกันว่า หากโยนเหรียญแล้วออก หัว จะได้เงิน **1** ดอลลาร์ จงหาว่าคุณจะได้เงินรางวัลเท่าไร หากโยนเหรียญทั้งหมด **5** ครั้ง
- โยนเหรียญหนึ่งเหรียญ ซึ่งเป็นเหรียญที่มีความน่าจะเป็นที่จะออกหัว และ ก้อย เท่าๆกัน จงหา ค่าความน่าจะเป็นที่ไม่ออกหัวเลยสักครั้ง ในการโยน ทั้งหมด **5** ครั้ง จะเป็นเท่าไร
- โยนเหรียญหนึ่งเหรียญ ซึ่งเป็นเหรียญที่มีความน่าจะเป็นที่จะออกหัว และ ก้อย เท่าๆกัน จงหาว่า ถ้าหากโยนเหรียญทั้งหมด **5** ครั้ง แล้วจงหา ค่าความน่าจะเป็น ที่จะออก หัว แค่ **1** ครั้งเท่านั้น จะเป็นเท่าไร

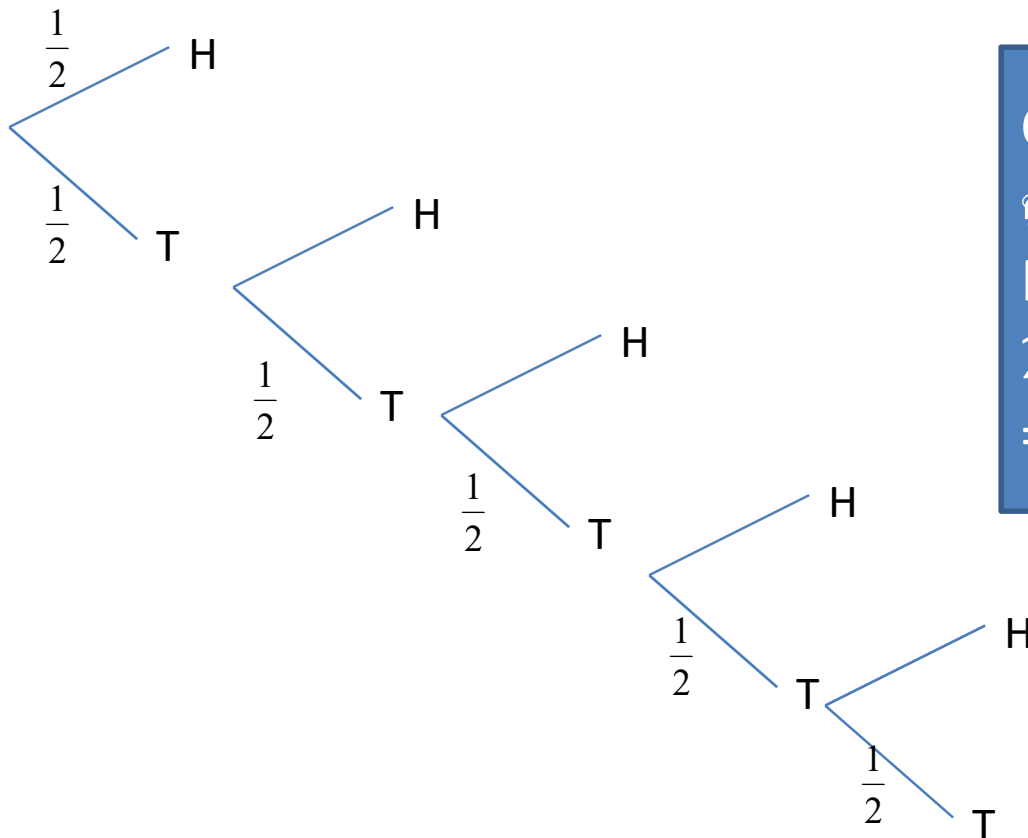
Example: Probabilistic Analysis

- โยนเหรียญหนึ่งเหรียญ ซึ่งเป็นเหรียญที่มีความน่าจะเป็นที่จะออกหัว และ ก้อย เท่าๆกัน พนันกันว่า หากโยนเหรียญแล้วออก หัว จะได้เงิน 1 ดอลลาร์ จงหาว่า คุณจะได้เงินรางวัลเท่าไร หากโยนเหรียญทั้งหมด 5 ครั้ง
- $I\{\text{เหรียญออกหัว}\} = 1$ if H occurs
0 if T occurs
- $X_i = I\{\text{เหรียญออกหัว ตอนโยนครั้งที่ } i\}$
- $X =$ จำนวนครั้งทั้งหมดที่โยนแล้วเหรียญออกหัว
 $= X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ (เพราะว่าโยนห้าครั้ง)
- $E[X] = E[X] = E[X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5]$
 $= E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + E[X_4] + E[X_5]$
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$

$$\begin{aligned} E[X_i] &= E [I\{\text{เหรียญออกหัว โยนครั้งที่ } i\}] \\ &= 1 \cdot \text{Pr}\{H\} + 0 \cdot \text{Pr}\{T\} \\ &= 1 \cdot (1/2) + 0 \cdot (1/2) \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

Example: Probabilistic Analysis

- โยนเหรียญหนึ่งเหรียญ ซึ่งเป็นเหรียญที่มีความน่าจะเป็นที่จะออกหัว และ ก้อย เท่าๆกัน จงหาค่าความน่าจะเป็นที่ไม่ออกหัวเลยสักครั้งในการโยนทั้งหมด 5 ครั้ง จะเป็นเท่าไร
- ทำได้โดยการวาดทรี ซึ่ง **event** ที่เราสนใจคือ ออกก้อยทั้ง 5 ครั้ง



Conditional probability
คูณค่าความน่าจะเป็นของทั้ง path จะได้
 $\Pr\{T,T,T,T,T\} =$
 $\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{32}$

Example : Probabilistic Analysis

- โยนเหรียญหนึ่งเหรียญ ซึ่งเป็นเหรียญที่มีความน่าจะเป็นที่จะออกหัว และ ก้อย เท่าๆกัน จงหาว่า ถ้าหากโยนเหรียญทั้งหมด 5 ครั้ง แล้วจงหา ความน่าจะเป็นที่จะออก หัว แค่ 1 ครั้งเท่านั้น จะเป็นเท่าไร
- ดังนั้น event ที่เราสนใจคือ
- เหรียญออกหัว เฉพาะตอโยนครั้งที่ 1 =>>> ถ้าโยนห้าครั้งแล้วออกแบบนี้ H T T T T
- เหรียญออกหัว เฉพาะตอโยนครั้งที่ 2 =>>> ถ้าโยนห้าครั้งแล้วออกแบบนี้ T H T T T
- เหรียญออกหัว เฉพาะตอโยนครั้งที่ 3 =>>> ถ้าโยนห้าครั้งแล้วออกแบบนี้ T T H T T
- เหรียญออกหัว เฉพาะตอโยนครั้งที่ 4 =>>> ถ้าโยนห้าครั้งแล้วออกแบบนี้ T T T H T
- เหรียญออกหัว เฉพาะตอโยนครั้งที่ 5 =>>> ถ้าโยนห้าครั้งแล้วออกแบบนี้ T T T T H
- $\Pr\{\text{เหรียญออกหัวตอโยนครั้งที่ 1}\} = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = 1/32$

ซึ่งเท่ากับกับ Pr ของการที่ เหรียญออกหัวตอโยนครั้งที่ 2,3,4,5

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\Pr\{\text{เหรียญออกหัว 1 ครั้ง}\} &= 1/32 + 1/32 + 1/32 + 1/32 + 1/32 \\ &= 5/32\end{aligned}$$

Practice: Probabilistic Analysis

- มีคน 20 คนอยู่ในงานปาร์ตี้ แล้วโยนเสื้อของตัวเองปนกัน ต่อมาให้กลับไปหยิบเสื้อ คำถามคือจงหาว่า โดยเฉลี่ยแล้ว (**expected value**) จะมีกี่คนที่เจอเสื้อของตัวเอง
- มีบอล 5 ลูก มีถัง 5 ใบ โยนบอลทั้ง 5 ลูกนั้น แล้วจงหาว่า **expected value** (ค่าเฉลี่ย) ที่บอลจะลงในถังใบที่ 1 จะมีกี่ลูก
- มีถัง 5 ใบ ให้หาว่าโดยเฉลี่ยแล้ว จะต้องโยนกี่ครั้งถึงจะมีบอลลงในถังใบที่ 2 (บอลลงครั้งแรก)

Practice: Probabilistic Analysis

- มีคน 20 คนอยู่ในงานปาร์ตี้ แล้วโยนเสื้อของตัวเองปนกัน ต่อมาให้กลับไปหยิบเสื้อ คำถามคือจงหาว่า โดยเฉลี่ยแล้ว (expected value) จะมีกี่คนที่เจอเสื้อของตัวเอง
- $I\{\text{หยิบเสื้อครั้งที่ } i\} = 1$ if คนที่ i หยิบได้เสื้อของตัวเอง
0 if คนที่ i ไม่สามารถหยิบได้เสื้อตัวเอง
- $\Pr\{\text{คนที่ 1 หยิบได้เสื้อตัวเอง}\} = 1/20 \cdot 1$
- $\Pr\{\text{คนที่ 2 หยิบได้เสื้อตัวเอง}\} = 1/20 \cdot 0 + 19/20 \cdot 1/19$
- $\Pr\{\text{คนที่ 3 หยิบได้เสื้อตัวเอง}\} = 2/20 \cdot 0 + 18/20 \cdot 1/18$
- $X_i = I\{\text{หยิบเสื้อครั้งที่ } i\}$
- $X =$ จำนวนคนทั้งหมดที่หยิบเสื้อของตัวเองกลับไปได้
- $E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_{19}] + E[X_{20}]$
 $= 1/20 * 20 = 1$

คนที่ 1 เอาเสื้อไปแล้ว
(ไม่ได้เสื้อตัวเอง)

เหลือเสื้ออีก 19 ตัวให้
คนที่สองเลือก โอกาส
ถูกคือ 1/19

Practice: Probabilistic Analysis

- มีบอล 5 ลูก มีถัง 5 ใบ โยนบอลทั้ง 5 ลูกนั้น แล้วจงหาว่า **expected value** ที่บอลจะลงในถังใบที่ 1 จะมีกี่ลูก
- $I\{\text{โยนครั้งที่ } i \text{ แล้วลูกบอลลงถังใบที่ } 1\} = 1$ if บอลลงถังใบที่ 1
0 if บอลไม่ลงถังใบที่ 1
- $X_i = I\{\text{โยนครั้งที่ } i \text{ แล้วลูกบอลลงถังใบที่ } 1\}$
- $E[X_i] = 1/5 \cdot 1 + 4/5 \cdot 0 = 1/5$
- $X =$ จำนวนบอลทั้งหมดที่ลงถังใบที่ 1 จากการโยนทั้งหมด 5 ครั้ง
- $E[X] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + E[X_4] + E[X_5]$
 $= 1/5 + 1/5 + 1/5 + 1/5 + 1/5 = 1$

คำถามเรื่อง จะมีบอลกี่ลูกลงถังที่กำหนด คือ **binomial dist.**
ถ้าโยนทั้งหมด n ครั้ง จะได้ค่า
expectation = n/b

Practice: Probabilistic Analysis

- มีถัง 5 ใบ ให้หาว่าโดยเฉลี่ยแล้ว จะต้องโยนกี่ครั้งถึงจะมีบอลลงในถังใบที่ 2 (บอลลงครั้งแรก)
- $I\{\text{โยนครั้งที่ } i \text{ แล้วลูกบอลลงถังใบที่ } 2\} = 1$ if บอลลงถังใบที่ 2
0 if บอลไม่ลงถังใบที่ 2
- $X_i = I\{\text{โยนครั้งที่ } i \text{ แล้วลูกบอลลงถังใบที่ } 2\}$
- $\Pr\{\text{โยนครั้งที่ } 1 \text{ แล้วบอลลงถังใบที่ } 2\} = 1/5$
- $\Pr\{\text{โยนครั้งที่ } 2 \text{ แล้วบอลลงถังใบที่ } 2\} = 4/5 \cdot 1/5$
- $\Pr\{\text{โยนครั้งที่ } 3 \text{ แล้วบอลลงถังใบที่ } 2\} = 4/5 \cdot 4/5 \cdot 1/5$
- $X = \text{จำนวนครั้งที่โยนแล้วบอลลงถังใบที่ } 2$
- $E[X] = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \cdot 1/5 = 5$

ความน่าจะเป็นที่จะไปลง
ถังอื่นที่ไม่ใช่ถังใบที่
สอง

คำถามเรื่องจะต้องโยนบอลกี่ครั้งโดยเฉลี่ยเพื่อให้ลง
ถังที่เรากำหนด เป็น geometric dist ซึ่งมี
expectation = b