Ch4: Analyzing Insertion-Sort

305233, 305234

Algorithm Analysis and Design

Jiraporn Pooksook
Naresuan University

Analyze the Correctness of Algorithm

- Using Loop Variants

```
for j=2 to length[A]
        do key = A[ j ]

        i = j - 1
        while i > 0 and A[ i ] > key
                do A[i+1] = A[ i ]
                i = i - 1
        A[i+1]=key
```

Loop invariants with insertion-sort

A loop invariant =
all elements in A[1 … j – 1] are in sorted order.

initialization

```
for j=2 to length[A]
    do key = A[ j ]

    i = j - 1
    while i > 0 and A[ i ] > key
        do A[i+1] = A[ i ]
        i = i - 1
    A[i+1]=key
```

mainte-
nance

termination

Loop invariants with insertion-sort

A loop invariant = all elements in A[1 … j – 1] are in sorted order.

Initialization

Input = [9,5,7,4,2]

j	key	A[1 to j-1] (before)	i	A[i] > key	A[1 to j-1] (after)	A[1… n]
2	5	[9] is sorted	1	9 > 5		[9,9,7,4,2]
			0		[9] is sorted	[5,9,7,4,2]
3	7	[5,9] is sorted	2	9 > 7		[5,9,9,4,2]
			1	5 > 7 (False)	[5,9] is sorted	[5,7,9,4,2]
4	4	[5,7,9] is sorted	3	9 > 4		[5,7,9,9,2]
			2	7 > 4		[5,7,7,9,2]
			1	5 > 4		[5,5,7,9,2]
			0		[5,5,7] is sorted	[4,5,7,9,2]
5	2	[4,5,7,9] is sorted	4			

Loop invariants with insertion-sort (Cont.)

A loop invariant = all elements in A[1 … j – 1] are in sorted order.

Input from j = 4 is [4,5,7,9,2]

j	key	A[1 to j-1] (before)	i	A[i] > key	A[1 to j-1] (after)	A[1… n]
5	2	[4,5,7,9] is sorted	4	9 > 2		[4,5,7,9,9]
			3	7 > 2		[4,5,7,7,9]
			2	5 > 2		[4,5,5,7,9]
			1	4 > 2		[4,4,5,7,9]
			0			[2,4,5,7,9]
6		[2,4,5,7,9] is sorted				

Termination

Loop invariants with insertion-sort

theoretically

loop invariant = before running loop j, all elements in A[1 … j – 1] are in sorted order.

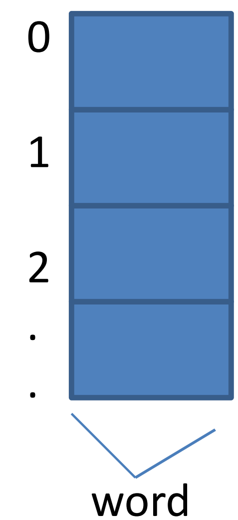
Initialization:
Before running loop 2 , all elements in = A[1…1] are sorted. (True!!)

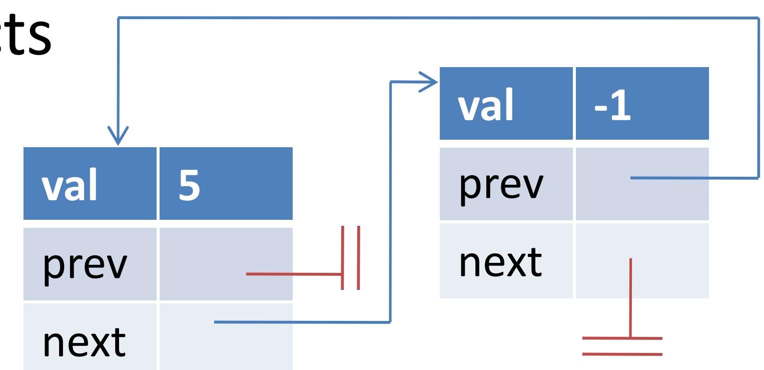
Maintenance:
If before running loop j , all elements in = A[1… j-1] are sorted.
then after running loop j, if A[i] > A[j] for i < j then A[j] will be inserted before position i and A[1…i-1] are sorted where A[1…i-1] < A[j] < A[i] .
when we found A[i] > A[j] for i< j then A[i+1] = A[j] where A[1…i] are sorted. Hence A[1…j] are sorted.
Hence before running loop j+1, A[1…j] are sorted. (True!!)

Termination: at starting of loop n+1, A[1…n] are sorted (True!!)

Model of Computation

- Specifies what operations an algorithm is allowed and cost of each operation.
- Random Access Machine (RAM)
  - Modeled by a big array
  - In O(1) time can load words,
    do O(1) computations and store O(1) words
- Pointer Machine
  - Dynamically allocated objects
  - An object has fields
  - 1 field = word or a pointer





THE RUNNING TIME OF ALGORITHM

Analyze the Running time of Algorithm

- Name each line of codes.

Line	
c_1	for j=2 to length[A]
c_2	do key = A[j]
c_3	
c_4	i = j - 1
c_5	while i > 0 and A[i] > key
c_6	do A[i+1] = A[i]
c_7	i = i – 1
c_8	A[i+1]=key

Analyze the Running time of Algorithm

- Using the growth of functions

	Cost	Times
for j=2 to length[A]	c_1	n
do key = A[j]	c_2	n-1
	0	n-1
i = j - 1	c_4	n-1
while i > 0 and A[i] >	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
do A[i+1] = A[	c_6	$\sum_{j=2}^{n} t_j - 1$
i = i – 1	c_7	$\sum_{j=2}^{n} t_j - 1$
A[i+1]=key	c_8	n-1

เริ่มจาก 2 ถึง n แสดงว่าลูปนี้รัน n-1 รอบ
บวกเพิ่มอีก 1 ตอนที่ต้องเช็คเงื่อนไขจะเข้าลูปรอบสุดท้าย

n is the size of input

Analyze the Running time of Algorithm

- Using the growth of functions

```
for j=2 to length[A]
        do key = A[ j ]

            j - 1
            ile i > 0 and A[ i ] >
            ] = A[
```

Cost	Times
c_1	n
c_2	n-1
0	n-1
c_4	n-1
c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
c_6	$\sum_{j=2}^{n} t_j - 1$
c_7	$\sum_{j=2}^{n} t_j - 1$
c_8	n-1

เริ่มจาก 2 ถึง n แสดงว่าลูปนี้รัน n-1 รอบ
บวกเพิ่มอีก 1 ตอนที่ต้องเช็คเงื่อนไขจะเข้าลูปรอบสุดท้าย

อยู่ในลูปแล้ว(ซึ่งลูปรัน n-1 รอบ) ดังนั้น บรรทัดนี้จะรัน n-1 รอบ

n is the size of input

Analyze the Running time of Algorithm

- Using the growth of functions

```
for j=2 to length[A]
        do key = A[ j ]

        i = j - 1
        while i   0 and A[ i ] >
                A[i+1] = A[

        A
```

Cost	Times
c_1	n
c_2	n-1
0	n-1
c_4	n-1
c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
c_6	$\sum_{j=2}^{n} t_j - 1$
c_7	$\sum_{j=2}^{n} t_j - 1$
c_8	n-1

เริ่มจาก 2 ถึง n แสดงว่าลูปนี้รัน n-1 รอบ
บวกเพิ่มอีก 1 ตอนที่ต้องเช็คเงื่อนไขจะเข้าลูปรอบสุดท้าย

ในโค้ดจริงบรรทัดนี้ไม่ได้ทำงานอะไร cost = 0 และโค้ดนี้อยู่ในลูปที่รัน n-1 รอบ

n is the size of input

Analyze the Running time of Algorithm

- Using the growth of functions

```
for j=2 to length[A]
        do key = A[ j ]

        i = j - 1
        whil  i > 0 and A[ i ] >
                do A[i+1] = A[
                i = i - 1
```

Cost	Times
c_1	n
c_2	n-1
0	n-1
c_4	n-1
c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
c_6	$\sum_{j=2}^{n} t_j - 1$
c_7	$\sum_{j=2}^{n} t_j - 1$
c_8	n-1

> เริ่มจาก 2 ถึง n แสดงว่าลูปนี้รัน n-1 รอบ
> บวกเพิ่มอีก 1 ตอนที่ต้องเช็คเงื่อนไขจะเข้าลูปรอบสุดท้าย

> อยู่ในลูปแล้ว(ซึ่งลูปรัน n-1 รอบ) ดังนั้น บรรทัดนี้จะรัน n-1 รอบ

> n is the size of input

Analyze the Running time of Algorithm

- Using the growth of functions

```
for j=2 to length[A]
        do key = A[ j ]

        i = j - 1
        while i > 0 and A[ i ] > key
                do        1] = A[ i ]
                i
        A
```

c_4	n-
c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
c_6	$\sum_{j=2}^{n} t_j - 1$
c_7	$\sum_{j=2}^{n} t_j - 1$
c_8	n-1

กรณีที่ดีที่สุดคือ A[i] < key ตลอด ดังนั้น จะรันทั้งหมด n-1 รอบ

เพราะเราไม่รู้ว่าจะถูกรันกี่รอบกันแน่ (เป็นได้ทั้งกรณีที่แย่สุด และดีสุด หรือกรณีอื่นๆ) เราจึงให้เวลาในการรัน ของรอบที่ j ใดๆ เป็น tj

กรณีที่แย่ที่สุดคือ A[i] > key ตลอด ดังนั้น ทุกๆครั้งจะต้องรัน เรียงเลขใหม่หมด
เช่น สมมติ i = 3 ดังนั้น ก็จะต้องเทียบ A[i] กับ key ทั้งหมด 3 รอบ เพราะว่ามากกว่า key ทุกตัว

n is the size of input

Analyze the Running time of Algorithm

- Using the growth of functions

	Cost	Times
for j=2 to length[A]	c_1	n
do key = A[j]	c_2	n-1
	0	n-1
i = j - 1	c_4	n-1
while i > 0 and A[i] > key	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
do A[i+1] = A[i]	c_6	$\sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
i = i – 1	c_7	$\sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
A[i+1]=key	c_8	n-1

การสลับตัวเลขนี้จะเกิดขึ้นภายในลูปของ จำนวน tj รอบ ดังนั้นจึงมีค่า เป็น tj-1

n is the size of input

Analyze the Running time of Algorithm

- Using the growth of functions

	Cost	Times
for j=2 to length[A]	c_1	n
do key = A[j]	c_2	$n-1$
	0	$n-1$
i = j - 1	c_4	$n-1$
while i > 0 and A[i] > key	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
do A[i+1] = A[i]	c_6	$\sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
i = i – 1	c_7	$\sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
A[i+1]=key	c_8	$n-1$

โค้ดนี้จะเกิดขึ้นภายในลูป ของ จำนวน tj รอบ ดังนั้น จึงมีค่า เป็น tj-1

n is the size of input

Analyze the Running time of Algorithm

- Using the growth of functions

	Cost	Times
for j=2 to length[A]	c_1	n
do key = A[j]	c_2	n-1
	0	n-1
i = j - 1	c_4	n-1
while i > 0 and A[i] > key	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
do A[i+1] = A[i]	c_6	$\sum_{j=2}^{n} t_j - 1$
i = i – 1	c_7	$\sum_{j=2}^{n} t_j - 1$
A[i+1]=key	c_8	n-1

โค้ดนี้จะเกิดขึ้นภายในลูป 2 ถึง n-1 ดังนั้นจึงมีจำนวนรอบเป็น n-1

n is the size of input

Analyze the Running time of Algorithm

- Using the growth of functions

	Cost	Times
for j=2 to length[A]	c_1	n
do key = A[j]	c_2	n-1
	0	n-1
i = j - 1	c_4	n-1
while i > 0 and A[i] > key	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
do A[i+1] = A[i]	c_6	$\sum_{j=2}^{n} t_j - 1$
i = i – 1	c_7	$\sum_{j=2}^{n} t_j - 1$
A[i+1]=key	c_8	n-1

n is the size of input

The Running time of insertion-sort

$$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5\sum_{j=2}^{n} t_j + c_6\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1) + c_7\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1) + c_8(n-1)$$

The best case: all element are ordered.

$$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5(n-1) + c_8(n-1)$$

$$T(n) = (c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_8)n - (c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_8)$$

an+b is a linear function of n

Note!!

$$\sum_{j=2}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

$$\sum_{j=2}^{n}(j-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

The worst case: a reversed ordered array.

$$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) + c_6\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + c_7\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + c_8(n-1)$$

$$T(n) = \left(\frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2} + \frac{c_7}{2}\right)n^2 + \left(c_1 + c_2 + c_4 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} - \frac{c_7}{2} + c_8\right)n - (c_2 + c_4 + c_5 + c_8)$$

an^2+bn+c is a quadratic function of n

Analyze the Running time of Algorithm

$$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5\sum_{j=2}^{n} t_j + c_6\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1) + c_7\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1) + c_8(n-1)$$

```
for j=2 to
        d
        
        i = j - 1
        while i > 0 and A[ i ] > key
                do A[i+1] = A[ i ]
                i = i – 1
```

กรณีที่ดีที่สุด เมื่อตัวเลขเรียงมาหมดแล้ว โค้ดบรรทัด c5,c6,c7 ก็จะไม่ต้องทำอะไรเลย

c_1	n
c_2	n-1
0	n-1
c_4	n-1
c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
c_6	$\sum_{j=2}^{n} t_j - 1$
c_7	$\sum_{j=2}^{n} t_j - 1$
c_8	n-1

$$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5(n-1) + c_8(n-1)$$

$$T(n) = (c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_8)n - (c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_8)$$

n is the size of input

Analyze the Running time of Algorithm

$$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5\sum_{j=2}^{n} t_j + c_6\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1) + c_7\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1) + c_8(n-1)$$

	Cost	Times
for j=2 to length[A]	c_1	n
	c_2	n-1
	0	n-1
i = j - 1	c_4	n-1
while i > 0 and A[i] > key	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
do A[i+1] = A[i]		
i = i – 1		

กรณีที่แย่ที่สุด เมื่อตัวเลขเรียงจากมากไปหาน้อยอยู่ก่อน

ดังนั้น แต่ละรอบของ j ก็จะต้องเรียงตัวเลขทุกตัว
ยกตัวอย่างเช่น
ถ้า j = 2 ค่า i = 1 ดังนั้น โค้ดนี้ ก็จะต้องรัน 2 รอบ
เมื่อ j=3 , i = 2 ดังนั้น โค้ดนี้ก็จะต้องรัน 3 รอบ
ไปเรื่อยๆ จนถึง j= n โค้ดนี้ ก็ต้องรัน n รอบ
ดังนั้น เราก็จะได้ว่า ค่า tj ก็คือค่า j นั่นเอง

$$\sum_{j=2}^{n} j \Rightarrow 2 + 3 + 4 + \ldots + n$$

$$\sum_{j=1}^{n} j \Rightarrow 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{j=2}^{n} j \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

n is the size of input

The Running time of insertion-sort

$$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5\sum_{j=2}^{n} t_j + c_6\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1) + c_7\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1) + c_8(n-1)$$

The best case: all element are ordered.

$$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5(n-1) + c_8(n-1)$$

$$T(n) = (c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_8)n - (c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_8)$$

an+b is a linear function of n

Note!!

$$\sum_{j=2}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

$$\sum_{j=2}^{n} (j-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

The worst case: a reversed ordered array.

$$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) + c_6\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + c_7\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + c_8(n-1)$$

$$T(n) = \left(\frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2} + \frac{c_7}{2}\right)n^2 + \left(c_1 + c_2 + c_4 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} - \frac{c_7}{2} + c_8\right)n - (c_2 + c_4 + c_5 + c_8)$$

an^2+bn+c is a quadratic function of n