Ch7: Asymptotic Notations

305233, 305234

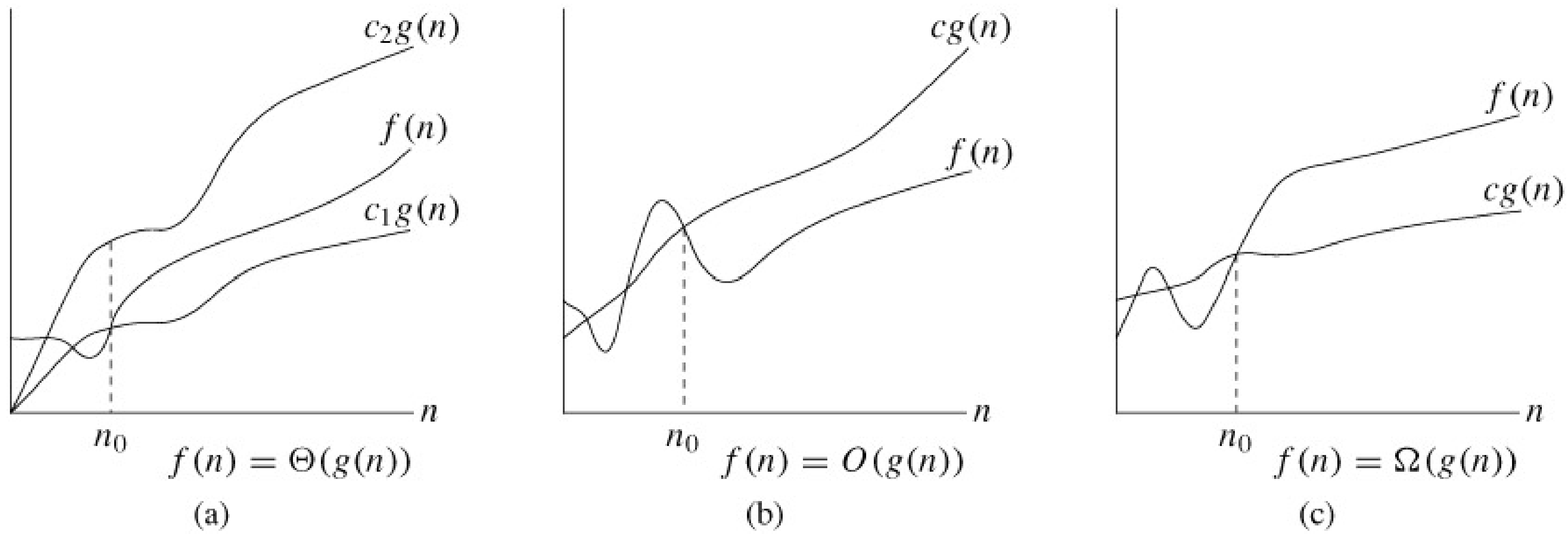
Algorithm Analysis and Design

Jiraporn Pooksook
Naresuan University

What is asymptotic notation?

- We are concerned with how the running time of an algorithm increases with the size of the input in the limit, as the size of the input increases without bound.
- We use it to describe running time of an algorithm which are defined in terms of functions whose domain are N={0,1,2,3,…}
- Five asymptotic notations:
  – Big theta
  – Big O
  – Big Omega
  – Little O
  – Little omega

Examples of the Θ, O, Ω notations



Θ - Notations

- $\Theta(g(n)) =$ { f(n): there exist positive constants c_1, c_2, and n_0 such that $0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$ for all $n \ge n_0$ }
- A function f(n) belongs to the set if there exist positive constants c_1 and c_2 such that it can be "sandwiched" between $c_1 g(n)$ and $c_2 g(n)$, for sufficiently large n.

We write $f(n) = \Theta(g(n))$ to express $f(n) \in \Theta(g(n))$

Example: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ และ $g(n) = n^2$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in \Theta(g(n))$
- จากนิยามของ Θ เราต้องทำการหาค่า c_1 และ c_2 และ n_0 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง
- $\boxed{0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)}$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน **f(n)** และ **g(n)** ลงไป
- จะได้ $0 \le c_1 n^2 \le \frac{1}{2}n^2 - 3n \le c_2 n^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย n^2 จะได้ $0 \le c_1 \le \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \le c_2$

ถ้า n > 6 เมื่อไหร่ จะทำให้ 3/n ลู่เข้าสู่ 0 ซึ่งจะทำให้ค่าของ ½-3/n เกือบคงที่ ที่ ½ ดังนั้นถ้าเราเลือกค่า n ที่ >= 7 ค่า c1 จะเป็นค่า <= 1/14

ถ้า n >=1 แต่ n < 6 จะทำให้ค่าของ ½-3/n ติดลบ เราก็ต้องเลือกค่า c2 >= ½ (เพื่อที่จะได้ทำให้สมการเป็นบวก) พอ n=6 ก็จะได้ c2>=0 และเมื่อ n >=7 จะทำให้ 3/n วิ่งเข้าสู่ 0 ดังนั้นค่า c2 จะ >= ½

Example: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า n = 6, c_1 จะมีค่า <= 0 และถ้า n>=7, c_1<=1/2
- ได้ว่า ถ้า n>=1 ถึง n < 6, ค่า ½-3/n ติดลบ และถ้า n=6, c_2 >=0 และเมื่อ n>=7, c_2>=1/2
- คำถามคือ ถ้าเช่นนั้น เราทำไมไม่เลือก c_1 ที่ ½ และ n>=6 ลองมาแทนค่า สมการกันดู
- พิจารณากรณี c_1 ก่อน
- จะเห็นว่า สมการไม่เป็นจริง
- 36/2 ไม่น้อยกว่า 0

$$\boxed{c_1 n^2 \le \frac{1}{2}n^2 - 3n} \le c_2 n^2$$

$$\boxed{\frac{1}{2}(6)^2 \le \frac{1}{2}(6)^2 - 3(6)} \le c_2 (6)^2$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \times 36 \le 0} \le c_2 \times 36$$

Example: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า n = 6, c_1 จะมีค่า <= 0 และถ้า n>=7, c_1<=1/2
- ได้ว่า ถ้า n>=1 ถึง n < 6, ค่า ½-3/n ติดลบ และถ้า n=6, c_2 >=0 และเมื่อ n>=7, c_2>=1/2
- ถ้าหากเราเลือก n>=7 และ c_1 ที่ 1/14 ลองมาแทนค่า สมการกันดู
- จะเห็นว่า สมการเป็นจริง

$$\boxed{c_1 n^2 \le \frac{1}{2}n^2 - 3n} \le c_2 n^2$$

$$\boxed{\frac{1}{14}(7)^2 \le \frac{1}{2}(7)^2 - 3(7)} \le c_2(7)^2$$

$$\boxed{\frac{1}{14}\times 49 \le \frac{49}{2} - 21} \le c_2 \times 36$$

Example: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า n = 6, c_1 จะมีค่า <= 0 และถ้า n>=7, c_1<=1/2
- ได้ว่า ถ้า n>=1 ถึง n < 6, ค่า ½-3/n ติดลบ และถ้า n=6, c_2 >=0 และเมื่อ n>=7, c_2>=1/2
- สมมติถ้าหากเราเลือก n>=7 และ c_1 ที่ 1/2 ลองมาแทนค่า สมการกันดู
- จะเห็นว่า สมการไม่เป็นจริง
- 49/2 ไม่น้อยกว่า 49/2-21

$$\boxed{c_1 n^2 \le \frac{1}{2} n^2 - 3n} \le c_2 n^2$$

$$\boxed{\frac{1}{2}(7)^2 \le \frac{1}{2}(7)^2 - 3(7)} \le c_2 (7)^2$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \times 49 \le \frac{49}{2} - 21} \le c_2 \times 36$$

Example: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า n = 6, c_1 จะมีค่า <= 0 และถ้า n>=7, c_1<=1/2
- ได้ว่า ถ้า n>=1 ถึง n < 6, ค่า ½-3/n ติดลบ และถ้า n=6, c_2 >=0 และเมื่อ n>=7, c_2>=1/2
- ทีนี้เรามาเลือก c_2 บ้าง ที่ n>=1 ถึง n<=5 จะแทนค่าสมการแล้วได้ติดลบหมด แต่ว่า เมื่อ n>=7 จะพบว่าค่าสมการลู่เข้าสู่ ½ ดังข้อมูลด้านบน เนื่องจาก เราต้องเลือก c2 ให้มากกว่าค่าคงที่ เราก็จะหาค่าคงที่ ที่ทำให้ c2 มากกว่าเสมอไม่ว่า n จะเป็นอะไร
- พิจารณากรณี c_2 >=1/2
- จะเห็นว่า สมการเป็นจริง

$$c_1 n^2 \le \boxed{\frac{1}{2}n^2 - 3n \le \frac{1}{2}(1)^2}$$

$$c_1 (1)^2 \le \boxed{\frac{1}{2}(1)^2 - 3(1) \le \frac{1}{2}(1)^2}$$

$$c_1 \times 1 \le \boxed{-\frac{5}{2} \le \frac{1}{2}}$$

Example: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ และ $g(n)$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in \Theta(g(n))$
- จากนิยามของ Θ เราต้องทำการหาค่า c_1 และ
  สมการต่อไปนี้เป็นจริง
- $0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน **f(n)** และ **g(n)** ลงไป
- จะได้ $0 \le c_1 n^2 \le \frac{1}{2}n^2 - 3n \le c_2 n^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย n^2 จะได้ $0 \le c_1 \le \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \le c_2$

จะเห็นว่า n>=1, C2 >=1/2

ส่วน n>=7, c1<=1/14

จะเห็นว่าเรามีเงื่อนไขค่า n สองค่า

สรุป เราก็เลือก n_0 =7

เพื่อให้ทั้งสมการเป็นจริง ที่ทำให้

c1 <= 1/14, c2 >= ½

ก็จะทำให้พิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$$

Example: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 6n^3$ และ $g(n) = n^2$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in \Theta(g(n))$

พิสูจน์ได้ว่าไม่จริง

- จากนิยามของ Θ เราต้องทำการหาค่า c_1 และ c_2 และ n_0 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง
- $\boxed{0 \le c_1\, g(n) \le f(n) \le c_2\, g(n)}$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน **f(n)** และ **g(n)** ลงไป
- จะได้ $0 \le c_1 n^2 \le 6n^3 \le c_2 n^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย n^2 จะได้ $0 \le c_1 \le 6n \le c_2$

หรือมองอีกมุมคือ ถ้าพิจารณา 6n <= c2 เมื่อเราแทน n=1 จะได้ว่า c2 มากกว่า 6 พอแทน n=2 ก็ต้องได้ c2 มากกว่า 12 ซึ่งจะเห็นว่าเราไม่สามารถหาค่าคงที่สักค่าหนึ่งที่มากกว่าทุกกรณีของ n ให้กับ c2 ได้เลย (ต้องระบุค่าคงที่ได้ว่า c2 > ค่าคงที่นั้นๆ)

ทำการหา c1 เราลองแทน n>=1, c1<=6, พอ n>=2 จะได้ c1<=12 ทำไปเรื่อยๆ เราจะยังค่า c1 ที่น้อยกว่า ค่าที่เปลี่ยนไปได้ เพราะว่า c1 จะน้อยกว่า 6(ต่ำสุด)

พิจารณา 6n <= c2 ดังนั้น n <= c2/6 ถ้าหากว่า เราเลือกค่า n เป็นเลขจำนวนมาก ก็จะไม่สามารถมากกว่า c2/6 ได้ ซึ่ง c2 เป็นค่าคงที่ ก็จะไม่สามารถทำให้เรากำหนด n เป็นเลขมากๆได้ (เงื่อนไขคือ for all $n \ge n_0$)

Practice: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^4 - 4n$ และ $g(n) = n^2$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in \Theta(g(n))$

พิสูจน์ได้ว่าไม่จริง

- จากนิยามของ Θ เราต้องทำการหาค่า c_1 และ c_2 และ n_0 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง
- $\boxed{0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)}$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน **f(n)** และ **g(n)** ลงไป
- จะได้ $0 \le c_1 n^2 \le 2n^4 - 4n \le c_2 n^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย n^2 จะได้ $0 \le c_1 \le 2n^2 - \frac{4}{n} \le c_2$

Practice: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^4 - 4n$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า **n = 1, c_1** จะมีค่า **< 0** และถ้า **n=2, c_1<=6** ถ้า **n=3, c_1<=17** ไปเรื่อยๆ
- คำถามคือ เราจะเลือก **c_1** ที่เท่าไหร่ เพื่อให้ สมการเป็นจริง ลองมาแทนค่า สมการกันดู ถ้าหากเลือก **n>=1** แล้ว **c_1<=6**
- พิจารณากรณี **c_1** ก่อน
- จะเห็นว่า สมการไม่เป็นจริง
- 6 ไม่น้อยกว่า -2

$$\boxed{c_1 n^2 \le 2n^4 - 4n} \le c_2 n^2$$

$$\boxed{6(1)^2 \le 2(1)^4 - 4(1)} \le c_2 (1)^2$$

$$\boxed{6 \times 1 \le -2} \le c_2 \times 1$$

Practice: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^4 - 4n$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า n = 1, c_1 จะมีค่า < 0 และถ้า n=2, c_1<=6 ถ้า n=3, c_1<=17 ไปเรื่อยๆ
- ถ้าเราเลือก n>=2 แล้ว c_1<=6
- พิจารณากรณี c_1 ก่อน
- จะเห็นว่า สมการเป็นจริง
- 24 เท่ากับ 24

$$c_1 n^2 \leq 2n^4 - 4n \leq c_2 n^2$$

$$6(2)^2 \leq 2(2)^4 - 4(2) \leq c_2 (2)^2$$

$$6 \times 4 \leq 24 \leq c_2 \times 2$$

Practice: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^4 - 4n$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า n = 1, c_1 จะมีค่า < 0 และถ้า n=2, c_1<=6 ถ้า n=3, c_1<=17 ไปเรื่อยๆ
- ถ้าเราเลือก n> 2 (n>=3)แล้ว c_1<=6
- พิจารณากรณี c_1 ก่อน
- จะเห็นว่า สมการเป็นจริง
- 54 น้อยกว่า 130

$$\boxed{c_1 n^2 \le 2n^4 - 4n} \le c_2 n^2$$

$$\boxed{6(3)^2 \le 2(3)^4 - 4(3)} \le c_2 (3)^2$$

$$\boxed{6 \times 9 \le 130} \le c_2 \times 9$$

Practice: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^4 - 4n$ และ $g(n) = n^2$
- ได้ว่า ถ้า n=1 , c_2 >= -2 และเมื่อ n=2, c_2=2 เมื่อ n>=3, c_2>=17 จะเห็นว่า เราสามารถเลือก เมื่อ n>=1 , c_2 >= 2 ได้
- เรามาลองทดสอบแทนค่าสมการดู หาก
- พิจารณากรณี n>=1 , c_2 >=2
- จะเห็นว่า สมการไม่เป็นจริง
- 12 ไม่ได้น้อยกว่า 2

$$c_1 n^2 \le 2n^4 - 4n \le 2(1)^2$$

$$c_1 (1)^2 \le 2(1)^4 - 4(1) \le 2(1)^2$$

$$c_1 \times 1 \le 12 \le 2$$

Practice: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^4 - 4n$ และ $g(n) = n^2$
- ได้ว่า ถ้า n=1 , c_2 >= -2 และเมื่อ n=2, c_2>=17 จะเห็นว่า
- สมมติว่า พิจารณากรณี n>=2 , c_2 >=2
- จะเห็นว่า สมการไม่เป็นจริง
- 24 ไม่ได้น้อยกว่า 8
- ต่อให้เราเปลี่ยนค่า c_2 ให้มากขึ้นอีก
- แต่ว่า ค่าของสมการตรงกลาง
- ก็จะยังมากกว่า ค่า c_2 ที่เราเลือกอยู่ดี

จะเห็นว่า เราสามารถหาค่าคงที่ให้ c1 ได้แต่หาให้ c2 ไม่ได้ ดังนั้น สรุปได้ว่า g(n) ไม่ได้เป็น big theta ของ f(n)

$$c_1 n^2 \le \boxed{2n^4 - 4n \le 2(2)^2}$$

$$c_1 (1)^2 \le \boxed{2(2)^4 - 4(2) \le 2(2)^2}$$

$$c_1 \times 1 \le \boxed{24 \le 8}$$

Practice: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^2 - 4n$ และ $g(n) = n^2$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in \Theta(g(n))$
- จากนิยามของ Θ เราต้องทำการหาค่า c_1 และ c_2 และ n_0 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง
- $\boxed{0 \le c_1\, g(n) \le f(n) \le c_2\, g(n)}$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน f(n) และ g(n) ลงไป
- จะได้ $0 \le c_1 n^2 \le 2n^2 - 4n \le c_2 n^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย n^2 จะได้ $0 \le c_1 \le 2 - \frac{4}{n} \le c_2$

หาค่า c1 เราลองแทน n=1, c1=-2 ถ้า n=2, c1=0 ถ้า n>4, ค่าของ 4/n จะลู่เข้าสู่ 0 ดังนั้นจะทำให้ c1<=2 เราจะสรุปได้ว่า เมื่อ n>=5 เราจะเลือก c1 <=2

ถ้า n =1, c2 = -2 เราก็ต้องเลือกค่า c2 >= 2 (เพื่อที่จะได้ทำให้สมการเป็นบวก) ถ้า n=2, c2 = 0, ถ้า n =4 , c2=2 ดังนั้นสรุปได้ว่าเราจะเห็นว่า ถ้า n>=1 เราจะเลือก c2 >= 2

Practice: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^2 - 4n$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า n=1 หรือ n=2, c_1 จะมีค่า <= 0 และถ้า n>4, c_1<=2
- ได้ว่า ถ้า n=1 ค่า c_2 ติดลบ และถ้า n=2, c_2 >=0 และเมื่อ n>4, c_2>=2
- คำถามคือ ถ้าเช่นนั้น ลองเลือก c_1 ที่ 2 และ n>=4 ลองมาแทนค่าสมการกันดู
- พิจารณากรณี c_1 ก่อน
- จะเห็นว่า สมการไม่เป็นจริง
- 36 ไม่น้อยกว่า 16

ถ้าเลือก c1=1, n>=4 หรือ ถ้าเลือก c1=0, n>=2 สมการจะเป็นจริง

$$c_1 n^2 \le 2n^2 - 4n \le c_2 n^2$$

$$2(4)^2 \le 2(16) - 16 \le c_2 (4)^2$$

$$32 \le 16 \le c_2 \times 16$$

Practice: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^2 - 4n$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า n=1 หรือ n=2, c_1 จะมีค่า <= 0 และถ้า n>4, c_1<=2
- ได้ว่า ถ้า n=1 ค่า c_2 ติดลบ และถ้า n=2, c_2 >=0 และเมื่อ n>4, c_2>=2
- สมมติ ถ้าเช่นนั้น ลองเลือก c_1 ที่ 6/5 และ n>=5 ลองมาแทนค่า สมการกันดู
- พิจารณากรณี c_1 ก่อน
- จะเห็นว่า สมการเป็นจริง
- 30 เท่ากับ 30

$$\boxed{c_1 n^2 \le 2n^2 - 4n} \le c_2 n^2$$

$$\boxed{\frac{6}{5}(5)^2 \le 2(25) - 20} \le c_2 (5)^2$$

$$\boxed{30 \le 30} \le c_2 \times 25$$

Practice: Θ - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^2 - 4n$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า n=1 หรือ n=2, c_1 จะมีค่า <= 0 และถ้า n>4, c_1<=2
- ได้ว่า ถ้า n=1 ค่า c_2 ติดลบ และถ้า n=2, c_2 >=0 และเมื่อ n>4, c_2>=2
- เพื่อเป็นการทดสอบ ลองเลือก c_1 ที่ 6/5 และแทน n=6 บ้าง
- พิจารณากรณี c_1 ก่อน
- จะเห็นว่า สมการเป็นจริง
- 23 น้อยกว่า 52

ก็จะพบว่า
c1<=6/5
และ n>=5
เป็นจริง

$$\boxed{c_1 n^2 \le 2n^2 - 4n} \le c_2 n^2$$

$$\boxed{\frac{6}{5}(6)^2 \le 2(36) - 20} \le c_2 (6)^2$$

$$\boxed{\frac{216}{5} \le 52} \le c_2 \times 36$$

O - Notations

- $\boxed{O(g(n)) = \{ f(n): \text{there exist positive constants } c \text{ and } n_0 \text{ such that } 0 \le f(n) \le c\, g(n) \text{ for all } n \ge n_0 \}}$
- We use O-notation when we have only an asymptotic upper bound (the worst case running time).
- Hence if we have $f(n) = \Theta(g(n))$
- then it follows that $f(n) = O(g(n))$

Example: O - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n^2$ และ $g(n) = n^2$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in O(g(n))$
- จากนิยามของ O เราต้องทำการหาค่า c และ n_0 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง
- $\boxed{0 \le f(n) \le c\,g(n)}$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน f(n) และ g(n) ลงไป
- จะได้ $0 \le 3n^2 \le cn^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย n^2 จะได้ $0 \le 3 \le c$

ซึ่งเราก็เลือกค่า c ที่ >= 3 ได้ และ n >=1 เพราะค่า n จะเป็นอะไรก็ได้ไม่มีผลอยู่แล้ว

Example: O - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n + 5$ และ $g(n) = n^2$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in O(g(n))$
- จากนิยามของ O เราต้องทำการหาค่า c และ n_0 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง
- $\boxed{0 \leq f(n) \leq c\,g(n)}$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน f(n) และ g(n) ลงไป
- จะได้ $0 \leq 3n + 5 \leq cn^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย n จะได้ $0 \leq 3 + \frac{5}{n} \leq cn$

สมมติถ้าให้ค่า n ที่ = 1 จะได้ c >= 8 , n ที่ = 2 จะได้ c >= 11/4 n=3, c >= 14/9, และ n=5,c>=1 และจะเห็นว่าเมื่อ n>=6, c >= 3/n ดังนั้นแสดงว่า c>0 แน่ๆ เมื่อ n>=6

Example: O - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n + 5$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า c = 1, n>=3 และถ้า c=2, n >= 3/2 ถ้า c=3, n >= 4/3 ไปเรื่อยๆ
- สมมติเราทดสอบสมการด้วยการเลือก c >= 1, n>=3
- จะเห็นว่า สมการไม่เป็นจริง $3n + 5 \le c\ n^2$
- 14 ไม่น้อยกว่า 9 $3(3) + 5 \le 1(3)^2$

$$14 \le 1 \times 9$$

Example: O - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n + 5$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า c = 1, n>=3 และถ้า c=2, n >= 3/2 ไปเรื่อยๆ
- ที่นี้เราลองเลือก c = 1, n>3 (n>=4)
- จะเห็นว่า สมการไม่เป็นจริง
- 17 ไม่น้อยกว่า 16

$$3n + 5 \le c\ n^2$$

$$3(4) + 5 \le 1(4)^2$$

$$17 \le 1 \times 16$$

Example: O - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n + 5$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า c = 1, n>=3 และถ้า c=2, n >= 3/2 ไปเรื่อยๆ
- ที่นี้เราลองเลือก c = 1, n>=5
- จะเห็นว่า สมการเป็นจริง
- 20 น้อยกว่า 25

$$3n + 5 \leq c\ n^2$$

$$3(5) + 5 \leq 1(5)^2$$

$$20 \leq 1 \times 25$$

Example: O - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n + 5$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า c = 1, n>=3 และถ้า c=2, n >= 3/2 ไปเรื่อยๆ
- ทีนี้เราลองเลือก c >=0, n>=6 (จากแนวโน้มที่เราเห็นว่า c เข้าใกล้ 0 เมื่อ n มากกว่า 6)
- จะเห็นว่า สมการไม่เป็นจริง
- เราจะใช้ c=0 ไม่ได้เนื่องจาก
- ค่าฝั่งขวาจะกลายเป็น 0 หมด
- ซึ่งเรากำลังเทียบว่าฝั่งซ้ายน้อยกว่า
- ทำให้เราไม่สามารถหาค่าฝั่งซ้ายที่ <0 ได้
- เพราะฉะนั้นต้องเลือก c>=1, n>=5

$$3n + 5 \le c\ n^2$$

$$3(6) + 5 \le 0(6)^2$$

$$23 \le 0$$

o - Notations

- $o(g(n)) =$ { f(n): for any positive constant c > 0, there exists a constant $n_0 > 0$ such that $0 \leq f(n) < c\,g(n)$ for all $n \geq n_0$ }

Example: o - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n$ และ $g(n) = n^2$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in o(g(n))$
- จากนิยามของ **little o** เราต้องทำการหาค่า c และ n_0 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง สำหรับทุกๆค่า c >0
- $\boxed{0 \le f(n) < c\,g(n)}$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน f(n) และ g(n) ลงไป
- จะได้ $0 \le 2n < cn^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย n จะได้ $0 \le 2 < cn$

ซึ่งถ้าเราเลือกค่า c ที่ =1 จะได้ n > 2 ดังนั้น n_0 >2
ถ้าเราเลือกค่า c ที่ =2 จะได้ n > 1 ดังนั้น n_0 >1
เพราะฉะนั้นเราสามารถหาค่า c ได้เรื่อยๆ
ถ้า c = k ใดๆ เราก็จะหาค่า n ได้ที่ 2/k

Example: o - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n$ และ $g(n) = n^2$
- เราได้ว่า ถ้า c = 1, n> 2 และถ้า c=2, n > 1 ไปเรื่อยๆ คือ ถ้า c= k , n> 2/k
- สมมติเราทดสอบสมการด้วยการเลือก c = 1, n>=3
- จะเห็นว่า สมการเป็นจริง
- 6 น้อยกว่า 9
- แต่หาก เลือก c=1, n>=2
- สมการจะไม่เป็นจริง
- 4 ไม่น้อยกว่า 4
- เพราะฉะนั้นต้องเลือก c >=1, n>2

$$2n \le c\ n^2$$

$$2(3) \le 1(3)^2$$

$$6 \le 9$$

Example: o - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n^2$ และ $g(n) = n^2$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in o(g(n))$
- จากนิยามของ **little o** เราต้องทำการหาค่า **c** และ **n_0** ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง
- $\boxed{0 \le f(n) < c\,g(n)}$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน **f(n)** และ **g(n)** ลงไป
- จะได้ $0 \le 3n^2 < cn^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย n^2 จะได้ $0 \le 3 < c$

พิสูจน์ได้ว่าไม่จริง

ซึ่งเราจะได้ค่า c ที่ > 3 แต่ว่าตามนิยามของ little o บอกไว้ว่า สำหรับค่า c ทุกๆตัวที่ > 0 (ซึ่งเราแทน c = 1 ไม่ได้ในกรณีนี้) ก็จะพบว่า เราไม่สามารถพิสูจน์ได้

O-notations vs. o-notations

- จะเห็นว่า O –notations จะครอบคลุมกรณีมากกว่า คือ ถ้าเราวิเคราะห์สมการเวลาไว้ tight ก็ได้ หรือจะไม่ tight bound ก็ได้
- แต่ว่า o – notations จะครอบคลุมเฉพาะกรณีที่ ไม่ tight bound
- Tight bound คือกรณีที่สมการไม่ฟิตกัน อาจจะเพราะเรา over estimate เช่น กรณี $f(n) = 2n$ และ $g(n) = n^2$
- แล้วเราจะหาว่า $f(n) \in o(g(n))$
- จะหาด้วย little-o ได้เพราะว่า ไม่ tight bound
- ดังนั้น ถ้าสมการ ไม่ tight bound เราจะพบค่า little o ของมัน และ big o ของมันด้วย

Ω - Notations

- $\Omega(g(n)) =$ { f(n): there exist positive constants c and n_0 such that
$0 \leq c\,g(n) \leq f(n)$ for all $n \geq n_0$ }
- We use Ω -notation when we have only an asymptotic lower bound (the best case running time).
- Hence if we have $f(n) = \Theta(g(n))$
- then it follows that $f(n) = \Omega(g(n))$

Example: Ω - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n^2$ และ $g(n) = n$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in \Omega(g(n))$
- จากนิยามของ Ω เราต้องทำการหาค่า c และ n_0 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง
- $\boxed{0 \leq c\, g(n) \leq f(n)}$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน **f(n)** และ **g(n)** ลงไป
- จะได้ $0 \leq cn \leq 3n^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย n^2 จะได้ $0 \leq \frac{c}{n} \leq 3$

ถ้า n = 1 แล้วให้ c <= 3 ถ้า n=2 แล้ว c <= 6, n=3, c<=9
ต่อไปเรื่อยๆ จะเห็นว่า เราสามารถหาค่าคงที่ ให้ cที่ทำให้น้อยกว่า ก็จะได้ว่า n0>=1, c<=3

Example: Ω - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n^2$ และ $g(n) = n$
- เราได้ว่า ถ้า n = 1, c<=3 และถ้า n=2, c <= 6 ไปเรื่อยๆ
- ที่นี้เราลองเลือก c = 3, n =1
- จะเห็นว่า สมการเป็นจริง
- 3 เท่ากับ 3

$$c\ n \leq 3n^2$$

$$3(1) \leq 3(1)$$

$$3 \leq 3$$

- แต่หากเลือก c>3, n=1 จะพบว่าสมการไม่เป็นจริง

$$c\ n \leq 3n^2$$

$$4(1) \leq 3(1)$$

$$4 \leq 3$$

Example: Ω - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n^2$ และ $g(n) = n^2$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in \Omega(g(n))$
- จากนิยามของ Ω เราต้องทำการหาค่า c และ n_0 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง
- $\boxed{0 \le c\, g(n) \le f(n)}$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน **f(n)** และ **g(n)** ลงไป
- จะได้ $0 \le cn^2 \le 3n^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย n^2 จะได้ $0 \le c \le 3$

เราก็จะได้ว่า c <= 3 ดังนั้น c เป็นเลขอะไรก็ได้ที่น้อยกว่า 3
ส่วน n จะเป็นเท่าไหร่ก็ได้ เพราะสมการที่เหลือไม่ขึ้นกับ n

ω - Notations

- $\omega(g(n)) =$ { f(n): for any positive constants $c > 0$ and n_0 such that $0 \leq c\, g(n) < f(n)$ for all $n \geq n_0$ }

Example: ω - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n^2$ และ $g(n) = n$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in \omega(g(n))$
- จากนิยามของ ω เราต้องทำการหาค่า c และ n_0 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง
- $\boxed{0 \le c\,g(n) < f(n)}$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน f(n) และ g(n) ลงไป
- จะได้ $0 \le cn < 3n^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย n^2 จะได้ $0 \le \frac{c}{n} < 3$

ถ้าหาก c =3 เราก็จะได้ค่า n > 1 เพื่อให้ พจน์ c/n มันน้อยกว่า 3 ตามสมการ
สมมติ c=1 เราก็จะได้ค่า n > 1 เช่นกัน(หารแล้วปัดขึ้น) เราก็สามารถหาค่า c ได้ทุกตัว ที่ทำให้ หาค่า n ได้

Example: ω - Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 3n^2$ และ $g(n) = n^2$
- ต้องการพิสูจน์ว่า $f(n) \in \omega(g(n))$

พิสูจน์ไม่ได้ว่าไม่จริง

- จากนิยามของ ω เราต้องทำการหาค่า c และ n_0 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง
- $\boxed{0 \leq c\,g(n) < f(n)}$
- เริ่มจากแทนค่าฟังก์ชัน **f(n)** และ **g(n)** ลงไป
- จะได้ $0 \leq cn^2 < 3n^2$
- หารสมการทั้งหมดด้วย n^2 จะได้ $0 \leq c < 3$

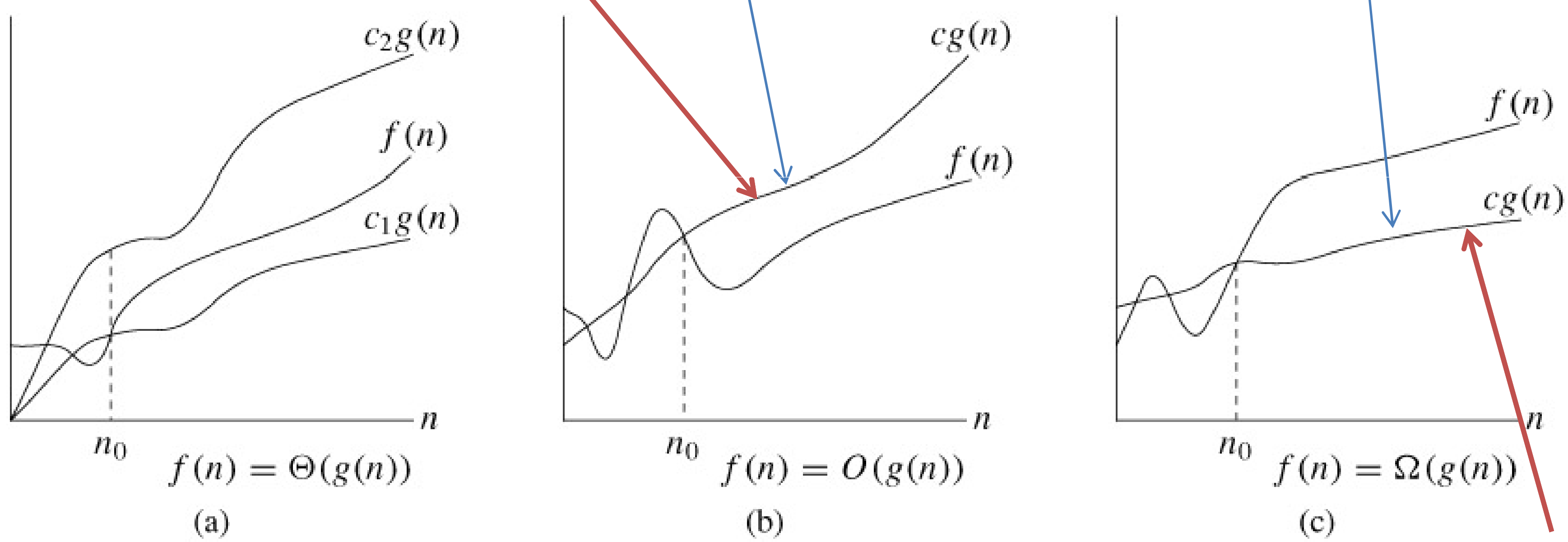
ก็จะได้ค่า $c < 3$ แต่ว่าไม่ตรงกับนิยาม เพราะนิยามบอกว่า สำหรับ c ทุกๆตัวที่มากกว่า 0 ดังนั้นกรณีนี้ เราจะแทนค่า c=1 ก็ไม่ได้

Example of the $\Theta, O, o, \Omega, \omega$ notations

ถ้าไม่ tight

f(n)=o(g(n)) Upper bound

Lower bound



ถ้าไม่ tight

f(n) = ω(g(n))

Practice: $\Theta, O, o, \Omega, \omega$ Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^4 - 4n$ และ $g(n) = n^2$

Practice: $\Theta, O, o, \Omega, \omega$ Notations

- กำหนดให้ $f(n) = 2n^2 - 4n$ และ $g(n) = n^2$

Standard notations and common functions

- Monotonicity
- A function $f(n)$ is **monotonically increasing** if $m \le n$ implies $f(m) \le f(n)$.
- A function $f(n)$ is **monotonically decreasing** if $m \le n$ implies $f(m) \ge f(n)$.
- A function $f(n)$ is **strictly increasing** if $m < n$ implies $f(m) < f(n)$ and **strictly decreasing** if $m < n$ implies $f(m) > f(n)$.

Standard notations and common functions

- Floor and ceilings
- For all real x, x-1 < $\lfloor x \rfloor$≤x ≤$\lceil x \rceil$< x+1
- For any integer n, $\lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor = n$
- For any real number n ≥ 0 and integers a,b > 0,

$$\lceil \lceil n/a \rceil / b \rceil = \lceil n/ab \rceil$$
$$\lfloor \lfloor n/a \rfloor / b \rfloor = \lfloor n/ab \rfloor$$
$$\lceil a/b \rceil \leq (a + (b-1))/b$$
$$\lfloor a/b \rfloor \geq (a - (b-1))/b$$

- The floor function f(x) = $\lfloor x \rfloor$ is monotonically increasing, as is the ceiling function f(x) = $\lceil x \rceil$.

Standard notations and common functions

- Modular arithmetic :

  a mod n = a – $\lfloor a / n \rfloor n$

- Polynomials:

$$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$$

- We say that a function f(n) is polynomially bounded if f(n) = $O(n^k)$ for some constant k.

Standard notations and common functions

- Exponentials : for all real a > 0, m and n, we have the following identities:

$$a^0 = 1$$
$$a^1 = a$$
$$a^{-1} = 1/a$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$(a^m)^n = (a^n)^m$$
$$a^m a^n = a^{m+n}$$

- For all n and n>=1, the function a^n is monotonically increasing in n.

Standard notations and common functions

- The rate of growth of polynomials and exponentials for all real constants a, b such that a>1, any **exponential function with a base strictly greater than 1 grows faster than any polynomial function**.
- Using e to denote the base of the natural logarithm function, we have for all real x: $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$
- For all real x, we have : $e^x \geq 1 + x$

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + x + x^2$$

Standard notations and common functions

- Logarithms: we shall use the following notations:

$$\lg n = \log_2 n$$
$$\ln n = \log_e n$$
$$\lg^k n = (\lg n)^k$$
$$\lg \lg n = \lg(\lg n)$$

Binary logarithm
Natural logarithm
Exponentiation
Composition

- We say that a function f(n) is polylogarithmically bounded if f(n) = O(lg n) for some constant k.
- Thus any positive **polynomial function grows faster than any polylogarithmic** function.

Standard notations and common functions

- Factorial: for integers n >=0

$$n! = o(n^n)$$
$$n! = \omega(2^n)$$
$$\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$$

Practice: asymptotic growth rates

- Rank the following functions by order of growth.

$$n$$
$$2^n$$
$$n \lg n$$
$$1$$
$$2^{2^{n+1}}$$
$$n^3$$

$$\Rightarrow$$

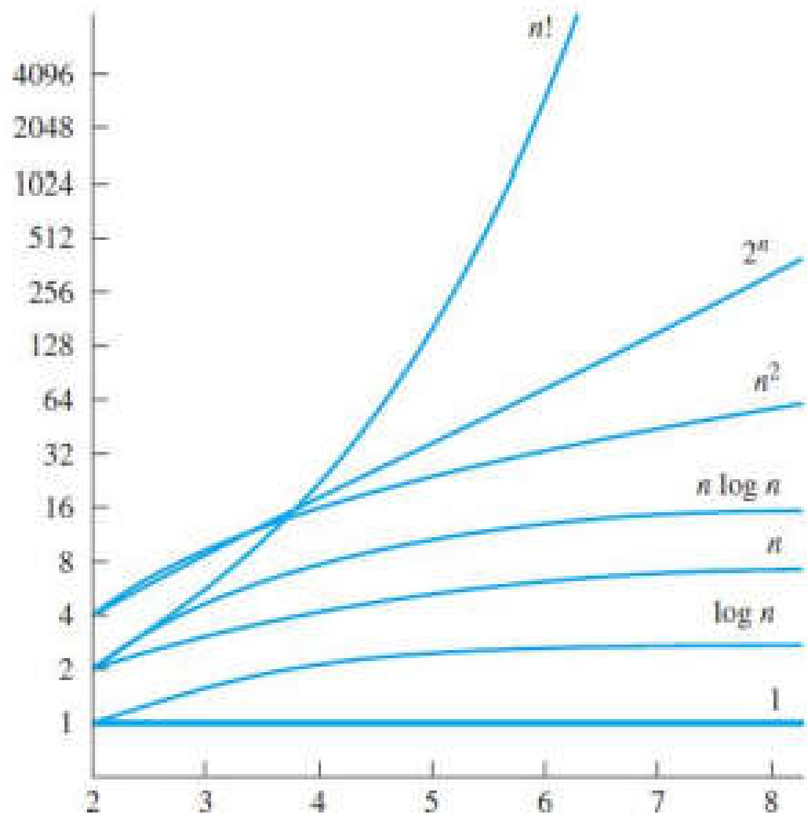
$$1$$
$$n$$
$$n \lg n$$
$$n^3$$
$$2^n$$
$$2^{2^{n+1}}$$

Asymptotic growth rates

Important Complexity Classes

These are common functions for big-O from least to greatest:

$$1, \log n, n, n \log n, n^2, 2^n, n!$$



Ref: http://courses.ics.hawaii.edu/ReviewICS141/morea/algorithms/GrowthFunctions-QA.pdf