

การแปลงลาปลาซ

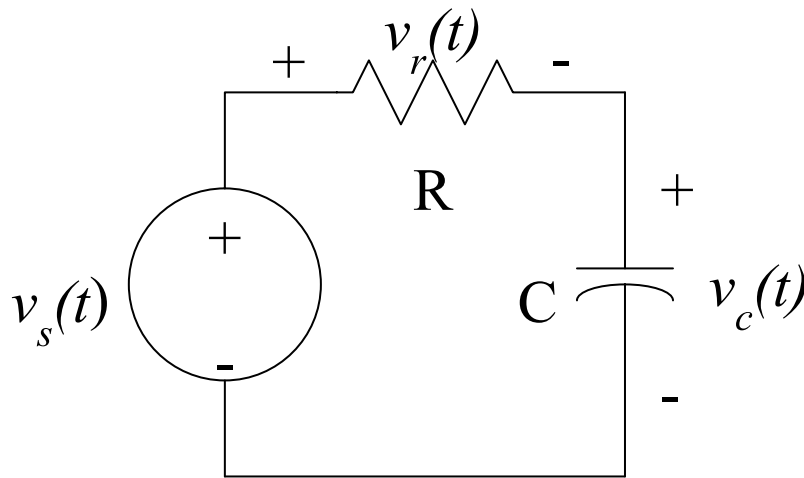
Laplace Transformation

ปิยดนัย ภาชนะพรรณ

วัตถุประสงค์

- ใช้แก้สมการอนุพันธ์ของวงจรที่มีประกอบด้วยตัวสะสมพลังงาน (ตัว L, C)
- ใช้แก้สมการอนุพันธ์เพื่อหาผลตอบสนองสมบูรณ์ (Complete Response)
- เหมาะสำหรับใช้วงจรแบบ Linear Time-Invariant แต่ไม่เหมาะกับวงจรแบบ Time – Invariant และ Nonlinear

A First Order RC Circuit



$$\text{KVL : } v_r(t) + v_c(t) = v_s(t)$$

$$Ri_R(t) + v_c(t) = v_s(t)$$

$$\text{จาก } i_R(t) = i_c(t) = C \frac{dv_c}{dt}$$

Differential Equation

$$RC \frac{dv_c}{dt} + v_c(t) = v_s(t)$$

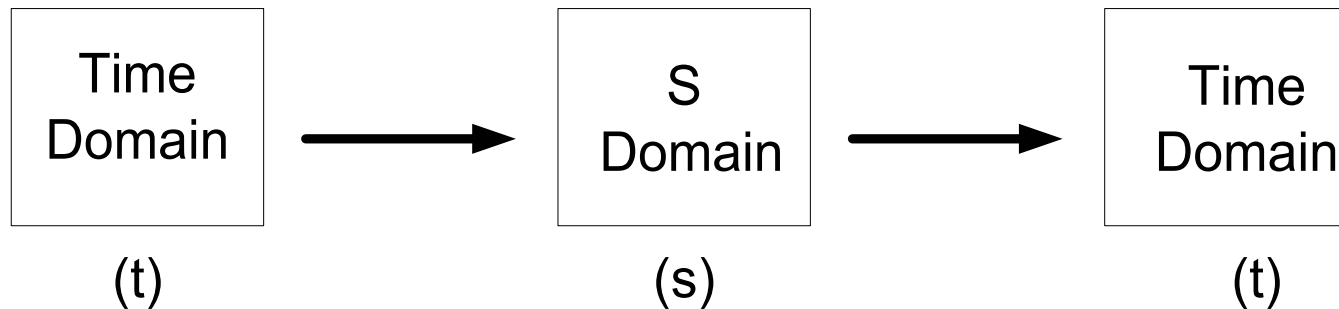
ใช้ Laplace Transform หา Complete Response ในวงจร

ผลตอบสมบูรณ์ (Complete Response)

- ผลตอบของวงจรต่อทั้ง input และ ภาวะเริ่มแรก (initial condition)
- ผลรวมของผลตอบที่ไม่มี input กับ ผลตอบแห่งสถานะศูนย์

$$\text{Complete Response} = \text{Zero Input Response} + \text{Zero State Response}$$

การแก้สมการอนุพันธ์โดยใช้การแปลง Laplace



นิยามการเข้าลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)$ สำหรับทุกๆ $t \geq 0$ คือ

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$F(s)$ - Laplace Transform of $f(t)$

s - complex frequency

โดยที่

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\} \\ &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \end{aligned}$$

เมื่อ

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t)e^{-st} dt$$

การแปลงจาก S-Domain กลับมาเป็น Time Domain เรียกว่า

“การแปลงกลับลาปลาซ (Invert Laplace)”

เขียนได้เป็น

$$\mathcal{L}^{-1} \{ F(s) \} = f(t)$$

EXAMPLE # 1

จงหาผลแปลงลาปลาซของ $f(t) = 1$ และ $f(t) = e^{at}$

กรณี $f(t) = 1$

$$\begin{aligned}\text{จาก } \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{e^{-st}}{s} \right\}_0^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} \right\} = \frac{1}{s}\end{aligned}$$

จะได้

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad ; s > 0$$

EXAMPLE # 1.2

กรณี $f(t) = e^{at}$

$$\begin{aligned} \text{จาก } \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{(s-a)} e^{-(s-a)t} \right\}_0^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{(s-a)} - \frac{e^{-(s-a)T}}{(s-a)} \right\} = \frac{1}{(s-a)} \end{aligned}$$

จะได้

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad ; s > a}$$

EXAMPLE # 1.3

กรณี $f(t) = t^n$; $n > -1$

จาก $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} t^n \cdot e^{-st} dt$

กำหนดให้ $u = st \longrightarrow du = s dt$

เมื่อ $t \rightarrow 0$; $u = 0$

$$t \rightarrow \infty ; u = \infty$$

$$\therefore \mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{s}\right)^n e^{-u} \left(\frac{du}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{\infty} u^n e^{-u} du$$

EXAMPLE # 1.3

ຈາກ $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{k-1} dt, \quad k > 0$

ແລະ $\Gamma(k+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^k dt, \quad k+1 > 0; \quad k > -1$

$$\begin{aligned} \therefore \mathcal{L}\{t^n\} &= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{\infty} u^n e^{-u} du \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \end{aligned}$$

ຖ້າ $n = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\therefore \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

EXAMPLE # 1.3

วิธีที่ 2

$n = 1$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t\} &= \int_0^{\infty} t \cdot e^{-st} dt = \left[t \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} dt \\ &= 0 - 0 + \frac{1}{s} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0\end{aligned}$$

$n = 2$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^2\} &= \int_0^{\infty} t^2 \cdot e^{-st} dt = \left[t^2 \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} 2t dt \\ &= 0 - 0 + \frac{2}{s} \int_0^{\infty} t \cdot e^{-st} dt = \frac{2}{s} \mathcal{L}\{t\} \\ &= \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2!}{s^{2+1}}\end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

คุณสมบัติที่สำคัญของการแปลงเข้าลาปลาซ

1. คุณสมบัติเชิงเส้น (Linear Property)
2. คุณสมบัติการสเกล (Scaling Property)
3. คุณสมบัติการเลื่อนเวลา (Time Shifting Property)
4. คุณสมบัติการเลื่อนความถี่ (Frequency Shifting Property)
5. คุณสมบัติการอนุพันธ์โดเมนเวลา (Differentiation in Time Domain)
6. คุณสมบัติอินทิเกรชันในโดเมนเวลา (Integration in Time Domain)
7. คุณสมบัติการอนุพันธ์ในโดเมนความถี่ (Differentiation in Frequency Domain)
8. คุณสมบัติอินทิเกรชันในโดเมนความถี่ (Integration in Frequency Domain)

1. คุณสมบัติเชิงเส้น (Linear Property)

ให้ f_1 และ f_2 $\rightarrow$ เป็นฟังก์ชันของเวลา (t)

c_1 และ c_2 $\rightarrow$ เป็นตัวคงค่า (Constant)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] &= c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} \\ &= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\end{aligned}$$

EXAMPLE # 2

ถ้า $f_1(t) = \cos at$ และ $f_2 = \sin at$ จงหาค่า $\mathcal{L}\{f_1(t)+f_2(t)\}$

จากสูตรความสัมพันธ์ของออยเลอร์ $e^{jat} = \cos at + j \sin at$

$$\mathcal{L}\{e^{jat}\} = \mathcal{L}\{\cos at + j \sin at\}$$

$$\frac{1}{s - ja} = \mathcal{L}\{\cos at\} + \mathcal{L}\{j \sin at\}$$

$$\frac{(s + ja)}{(s - ja)(s + ja)} = \mathcal{L}\{\cos at\} + \mathcal{L}\{j \sin at\}$$

$$\frac{(s + ja)}{(s^2 - j^2 a^2)} = \frac{(s + ja)}{(s^2 + a^2)} = \mathcal{L}\{\cos at\} + \mathcal{L}\{j \sin at\}$$

EXAMPLE # 2

$$\frac{s}{(s^2 + a^2)} + j \frac{a}{(s^2 + a^2)} = \mathcal{L}\{\cos at\} + j\mathcal{L}\{\sin at\}$$

$$\therefore \mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$
$$\therefore \mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

2. คุณสมบัติการสเกล (Scaling Property)

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$$

ที่มา

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(at) dt$$

กำหนดให้ $at = u, \quad a - \text{constant}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(at)\} &= \int_0^{\infty} e^{-(s/a)u} f(u) d\left(\frac{u}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-(s/a)u} f(u) du = \frac{1}{a} F\left\{\frac{s}{a}\right\} \end{aligned}$$

3. คุณสมบัติการเลื่อนเวลา (Time Shifting Property)

ถ้า $f(t) = f(t-t_0)$

$$\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = e^{-st_0} F(s)$$

ที่มา

$$\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} f(t-t_0)e^{-st} dt$$

กำหนดให้

$$\tau = t - t_0$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} &= \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+t_0)} d\tau \\ &= e^{-st_0} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau \\ &= e^{-st_0} F(s)\end{aligned}$$

EXAMPLE # 3

จงหาผลการแปลงเข้าลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = \sin 2(t-2)$

พบว่า $t_0 = 2$ และจาก $\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = e^{-st_0}F(s)$

$$\mathcal{L}\{\sin 2(t-2)\} = e^{-2s} \mathcal{L}\{\sin 2t\}$$

และจาก

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\therefore \mathcal{L}\{\sin 2(t-2)\} = e^{-2s} \left[\frac{2}{s^2 + 2^2} \right]$$

4. คุณสมบัติการเลื่อนความถี่ (Frequency Shifting Property)

$$\text{ถ้า } f(t) = f(t)e^{at}$$

จะได้

$$\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} = F(s-a)$$

ที่มา

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} &= \int_0^{\infty} f(t)e^{at}e^{-st}dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s-a)t}dt\end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} = F(s-a)$$

EXAMPLE # 4

จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = e^{3t}t^2$

จาก $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

จะได้ $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{2}{s^3}$

จาก $\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} = F(s-a)$

พบว่า $f(t) = e^{3t}t^2 \rightarrow a = 3$

จะได้ $\mathcal{L}\{e^{3t}t^2\} = \frac{2}{(s-3)^3}$

5. คุณสมบัติการอนุพันธ์โดเมนเวลา (Differentiation in Time Domain)

ถ้า $f(t) = \frac{df(t)}{dt}$ พบว่า

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

อินทิเกรต by part $\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = f(t)e^{-st}\Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$$

ทำนองเดียวกัน $\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \dots f^{(n-1)}(0)$

EXAMPLE # 5

จงหาผลแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $\frac{d(\sin 2t)}{dt}$

พบว่าที่ $t = 0$ จะได้ $f(0) = \sin 2(0) = 0$

และ
$$F(s) = \mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2 + 4}$$

จาก
$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$$

จะได้
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{d(\sin 2t)}{dt}\right\} &= s \frac{2}{s^2 + 4} - 0 \\ &= \frac{2s}{s^2 + 4}\end{aligned}$$

6. คุณสมบัติอินทิเกรชันในโดเมนเวลา (Integration in Time Domain)

ถ้าให้ $f(t) = \int_0^t f(t)dt$ พบว่า

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \int_0^\infty \left\{\int_0^t f(t)dt\right\} e^{-st} dt$$

อินทิเกรต by part โดยให้ $u = \int_0^t f(t)dt$ และ $dv = e^{-st} dt$
จะได้ $du = f(t)$ และ $v = -\frac{1}{s} e^{-st}$

จะได้

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \left\{\int_0^t f(t)dt\right\} \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s} e^{-st} \cdot f(t) dt$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

EXAMPLE

จงหาผลแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = \int_0^t \cos(3t)dt$

จาก $F(s) = \mathcal{L}\{\cos(3t)\} = \frac{s}{s^2 + 3^2}$

และ $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}F(s)$

จะได้

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos(3t)dt\right\} &= \frac{1}{s}\left(\frac{s}{s^2 + 9}\right) \\ &= \frac{1}{s^2 + 9}\end{aligned}$$

7. คุณสมบัติการอนุพันธ์ในโดเมนความถี่ (Differentiation in Frequency Domain)

ถ้าฟังก์ชันเวลา $f(t)$ ถูกคูณด้วย $t \rightarrow tf(t)$ พบว่า

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$$

พิสูจน์ หาอนุพันธ์ของ $F(s)$ เทียบกับ s โดย t คงที่

$$\begin{aligned}\frac{dF(s)}{ds} &= \frac{d}{ds} \left[\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right] \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} [e^{-st}] f(t) dt = \int_0^{\infty} (-t) e^{-st} f(t) dt \\ &= - \int_0^{\infty} e^{-st} t f(t) dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}\end{aligned}$$

8. คุณสมบัติอินทิเกรชันในโดเมนความถี่ (Integration in Frequency Domain)

ถ้าฟังก์ชันเวลา $f(t)$ ถูกหารด้วย $t \rightarrow \frac{f(t)}{t}$ พบว่า

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s)ds$$

พิสูจน์ อินทิเกรต $F(s)$ เทียบกับ s มีลิมิตจาก s ถึง infinity

$$\int_s^\infty F(s)ds = \int_s^\infty \left[\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \right] ds$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_s^\infty e^{-st} f(t)ds \right] dt = \int_0^\infty \left[f(t) \frac{e^{-st}}{-t} \right]_s^\infty dt$$

$$= \int_0^\infty \left[0 + f(t) \frac{e^{-st}}{-t} \right] dt = \int_0^\infty e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

EXAMPLE

จงหาผลแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $\frac{\sin t}{t}$

จะได้ $F(s) = \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}$

จาก

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s)ds$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{s^2 + 1}ds$$

และจาก

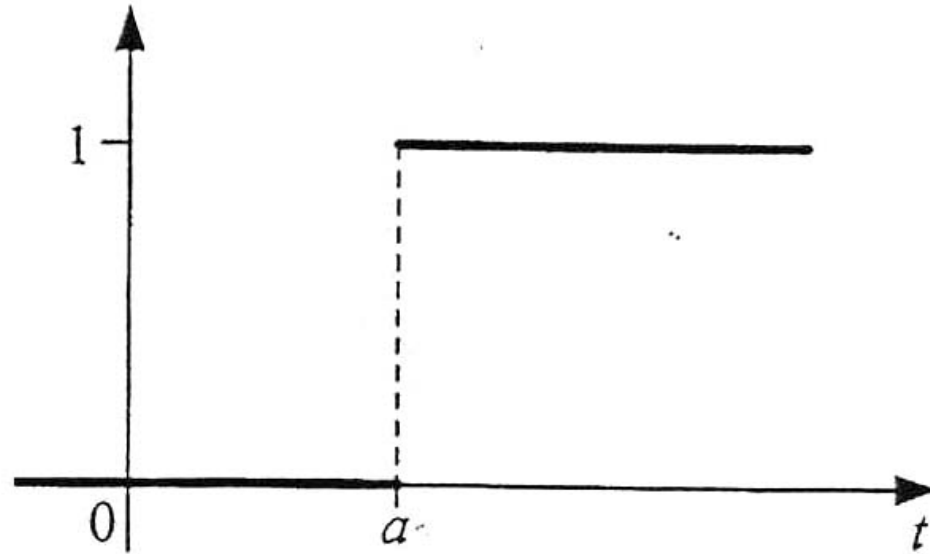
$$\int_s^\infty \frac{1}{u^2 + 1}du = \left[\tan^{-1} u\right]_s^\infty$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \tan^{-1} \infty - \tan^{-1} s = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s$$

ตารางที่ 3.1 พังก์ชันเวลาและผลการแปลงเข้าลาปลาซตามคุณสมบัติต่าง ๆ ของลาปลาซ

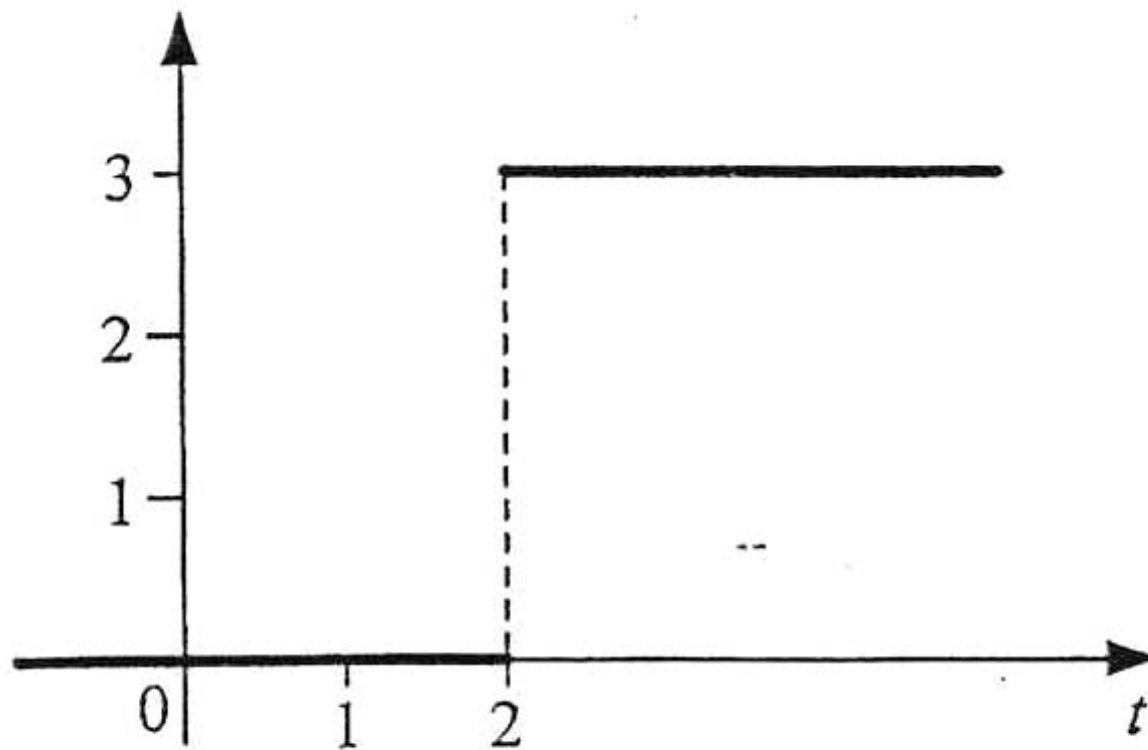
ลำดับที่	คุณสมบัติ	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
1	เชิงเส้น	$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(s) + bF_2(s)$
2	การสเกล	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) ; a > 0$
3	การเลื่อนเวลา	$f(t - t_0)$	$e^{-st_0}F(s)$
4	การเลื่อนความถี่	$f(t)e^{at}$	$F(s - a)$
5	อนุพันธ์โดเมนเวลา	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
6	อินทิกรัลโดเมนเวลา	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{1}{s}F(s)$
7	อนุพันธ์โดเมนความถี่	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds}F(s)$
8	อินทิกรัลโดเมนความถี่	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_0^\infty F(s)ds$

Laplace Transform of Unit Step Function



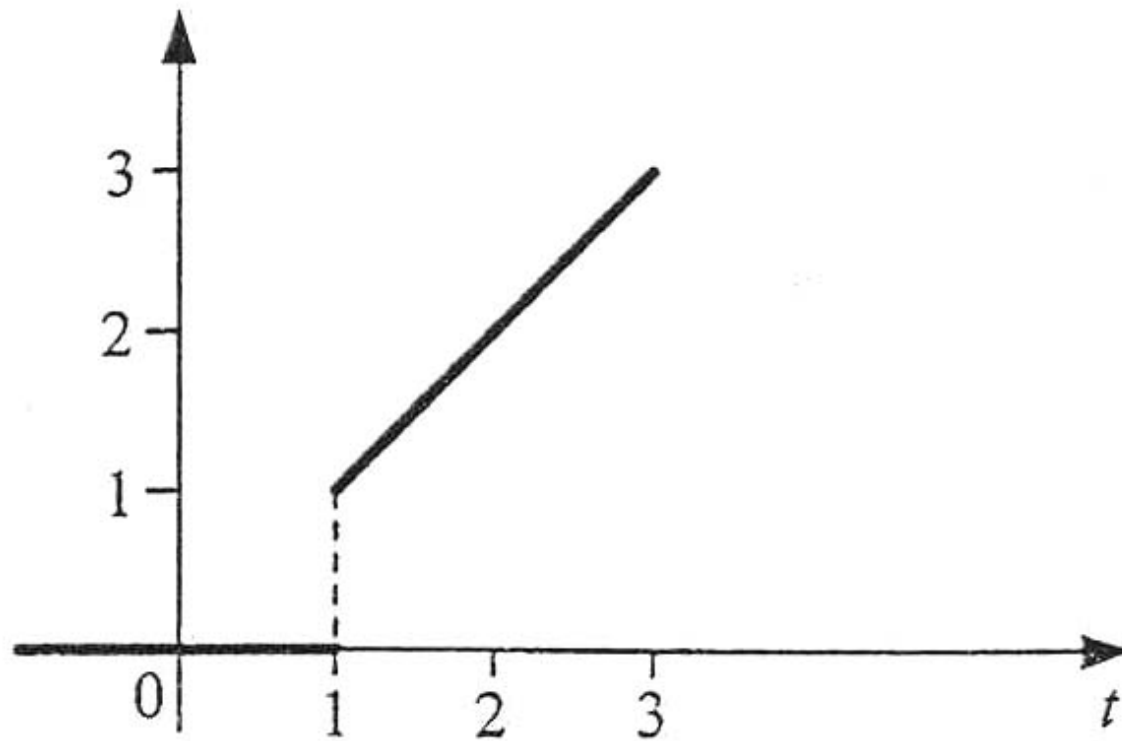
รูปที่ 3.1 กราฟของฟังก์ชันขั้นหนึ่งหน่วย

$$\text{Unit Step } u(t-a) = \begin{cases} 1 & ; t > a \\ 0 & ; t < a \end{cases}$$



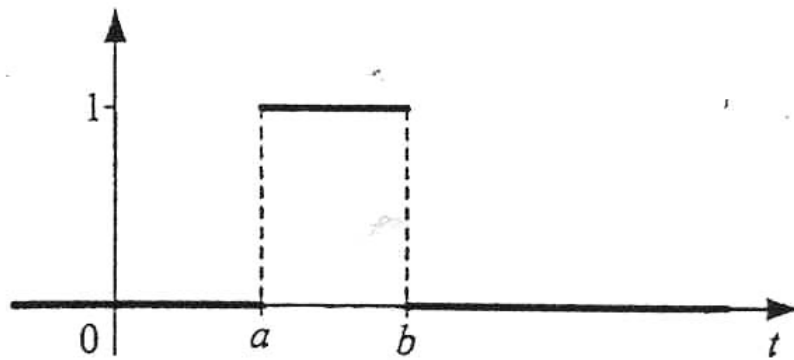
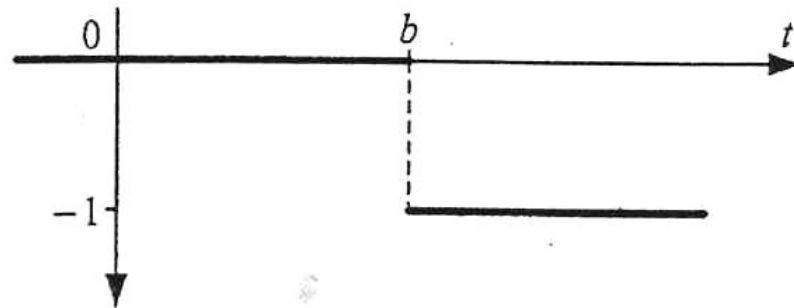
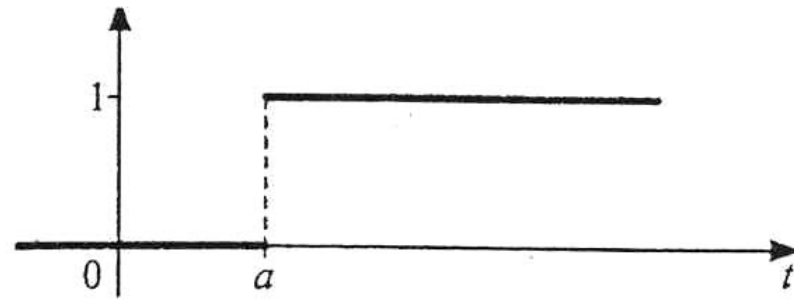
รูปที่ 3.2 กราฟของฟังก์ชัน $3u(t-2)$

$$3u(t-2) = \begin{cases} 3 & ; t > 2 \\ 0 & ; t < 2 \end{cases}$$



รูปที่ 3.4 กราฟของฟังก์ชัน $tu(t-1)$ (Clayton R.Paul, 1989 : 612)

$$tu(t-1) = \begin{cases} t & ; t > 1 \\ 0 & ; t < 1 \end{cases}$$



รูปที่ 3.5 กราฟของฟังก์ชัน $u(t-a) - u(t-b); a < t < b$

ผลการแปลงเข้าตาปลาซของฟังก์ชัน unit step

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}$
$f(t)u(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\begin{aligned} \text{พินิจ} \quad \mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-a)u(t-a)dt \\ &= \int_0^a e^{-st} f(t-a) \cdot 0 dt + \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a) \cdot 1 dt \\ &= \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt \end{aligned}$$

เปลี่ยนตัวแปร $t-a = u$ (คงค่า) จะได้

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} &= \int_0^{\infty} e^{-s(u+a)} f(u) du \\ &= e^{-sa} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du \\ &= e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t+a)\}$$

ที่มา เนื่องจาก $f(t) = f(t-a+a)$ กำหนดให้ $f(t-a+a) = F(t-a)$

ความสัมพันธ์ของ f และ F คือ $f(t+a) = F(t)$

จาก $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\}$

จะได้ $\mathcal{L}\{F(t-a)u(t-a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{F(t)\}$

แทน F เป็น f จะได้

$$\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t+a)\}$$

EXAMPLE 6

จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $(t^2 + 1)u(t-2)$

จาก $\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(t^2 + 1)u(t-2)\} &= e^{-2s}\mathcal{L}\{(t+2)^2 + 1\} \\ &= e^{-2s}\mathcal{L}\{t^2 + 4t + 5\} \\ &= e^{-2s}\left(\frac{2!}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{5}{s}\right)\end{aligned}$$

การแปลงลาปลาซของฟังก์ชันคาบ (Periodic Function)

ถ้ากำหนด f เป็น ฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ในช่วงที่กำหนดให้

$0 < t < P$ โดย P เป็นจำนวนจริง

และ $f(t + P) = f(t)$ แล้ว เรียก f เป็น ฟังก์ชันคาบ

P เป็น คาบของ f

กรณี n เป็นจำนวนเต็มบวก $\rightarrow f(t + nP) = f(t)$

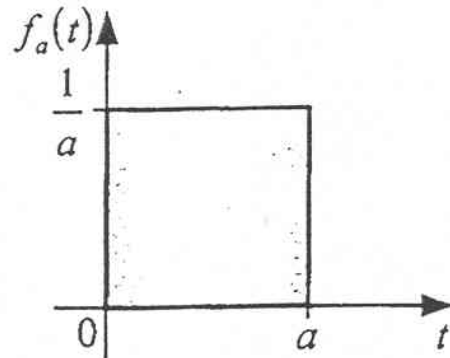
สามารถหาลาปลาซของ $f(t)$ ซึ่งมีคาบเท่ากับ P ได้เป็น

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^P f(t) e^{-st} dt$$

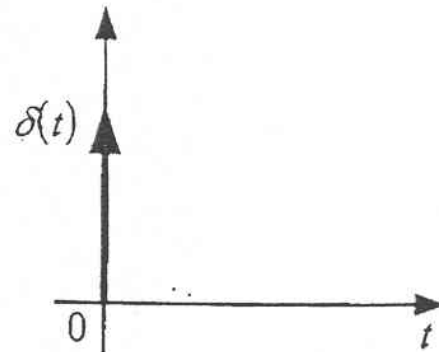
การแปลงลาปลาซของ Unit Impulse Function

Unit Impulse Function หรือ Dirac Delta Function คือ

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a} \{u(t) - u(t-a)\} \right]$$



(ก) พังก์ชัน $f_a(t)$

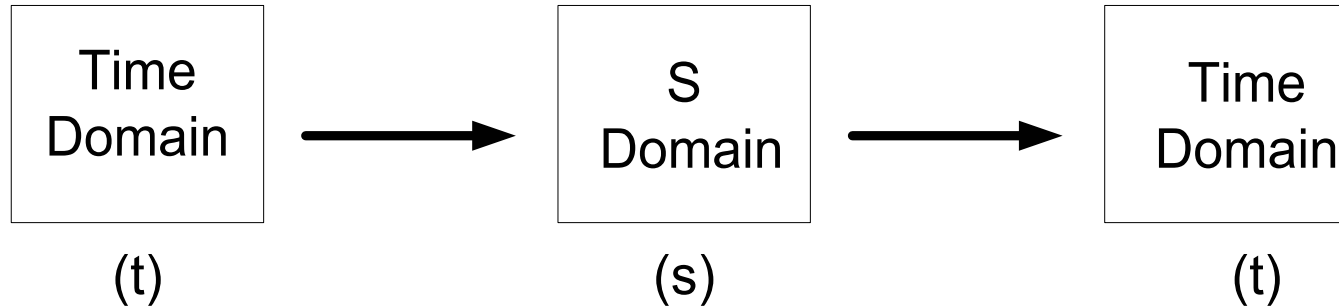


(ข) พังก์ชัน $\delta(t)$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{e^{-as}}{s} \right\} \right] = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{1 - e^{-as}}{as} \right]$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

การแปลงลาปลาซกลับ (Inverse Laplace Transform)



- เมื่อได้คำตอบในโดเมน S แล้ว ต้องนำ $F(s)$ มาแปลงกลับให้มาอยู่ในรูปโดเมนเวลา $f(t)$

วิธีการแปลง

1. ใช้สูตรเบื้องต้น หรือ จัดเทอม $F(s)$ ให้อยู่ในรูปที่ใช้สูตรได้
2. เทียบสัมประสิทธิ์
3. แยก $F(s)$ เป็นเศษส่วนย่อย

Lap

EXAMPLE # 7

จงหาผลการแปลงกลับลาปลาซของ $F(s) = \frac{1}{(s-20)^7} + \frac{1}{(s+1)^3}$

จาก $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ และ $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-20)^7} + \frac{1}{(s+1)^3}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-20)^7}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\} \\ &= e^{20t} \left[\frac{t^6}{6!} \right] + e^{-t} \left[\frac{t^2}{2!} \right] \\ &= e^{20t} \frac{t^6}{6!} + e^{-t} \frac{t^2}{2}\end{aligned}$$

EXAMPLE # 8

จงหาผลการแปลงกลับลาปลาซของ $F(s) = \frac{3s-12}{s^2+8}$

$$\text{จาก } \mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \text{และ} \quad \mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-12}{s^2+8}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+(\sqrt{8})^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{12}{s^2+(\sqrt{8})^2}\right\} \\ &= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+(2\sqrt{2})^2}\right\} - \frac{12}{2\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2\sqrt{2}}{s^2+(2\sqrt{2})^2}\right\} \\ &= 3\cos 2\sqrt{2}t - \frac{12}{2\sqrt{2}}\sin 2\sqrt{2}t \\ &= 3\cos 2\sqrt{2}t - 3\sqrt{2}\sin 2\sqrt{2}t \end{aligned}$$

การแปลงกลับลาปลาซโดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

ใช้ในกรณีที่ $F(s)$ ต้องแยกออกเป็นส่วนๆ เพื่อทำการเทียบกับสูตร

เช่น $F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)}$

หา $\frac{1}{s(s^2 + 1)}$ ใหม่ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{1}{s(s^2 + 1)} &= \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1} \\ &= \frac{A(s^2 + 1) + (Bs + C)s}{s(s^2 + 1)}\end{aligned}$$

จะได้ $As^2 + A + Bs^2 + Cs = 1$

$$(A + B)s^2 + Cs + A = 1$$

$$A = 1$$

$$B = -1$$

$$C = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right\} \\ &= 1 - \cos t\end{aligned}$$

EXAMPLE # 9

จงหาผลการแปลงกลับลาปลาซของ $F(s) = \frac{3s+1}{s^3 - s^2 + s - 1}$

$$\begin{aligned}\frac{3s+1}{s^3 - s^2 + s - 1} &= \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} \\ &= \frac{A}{(s-1)} + \frac{Bs+C}{(s^2+1)} \\ &= \frac{A(s^2+1) + (Bs+C)(s-1)}{(s-1)(s^2+1)}\end{aligned}$$

จะได้ $(A+B)s^2 + (C-B)s + (A-C) = 3s+1$

$$A+B=0 ; \quad C-B=3 ; \quad A-C=1$$

$A = 2$
$B = -2$
$C = 1$

EXAMPLE # 9

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{s^3-s^2+s-1}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{(s-1)} + \frac{Bs+C}{(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)} + \frac{-2s+1}{(s^2+1)}\right\} \\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)}\right\} \\ &= 2e^t - 2\cos t + \sin t\end{aligned}$$

การแปลงกลับลาปลาซโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย

$$F(s) = \frac{Q(s)}{N(s)} = \frac{b'_q s^q + b'_{q-1} s^{q-1} + b'_{q-2} s^{q-2} + \dots + b'_1 s + b'_0}{a'_n s^n + a'_{n-1} s^{n-1} + a'_{n-2} s^{n-2} + \dots + a'_1 s + a'_0}$$

เมื่อ a' และ b' เป็นค่าคงที่

q และ n เป็นกำลังสูงสุดของเศษส่วน $\rightarrow$ เป็นจำนวนเต็มบวก

- ถ้า $q > n \rightarrow$ เศษเกิน (Improper Fraction)
- $q < n \rightarrow$ เศษเหมาะสม (Proper Fraction)

• แยกเศษส่วนย่อย เมื่อ “ กำลังของ S ของเศษ < กำลังของ S ของส่วน ”
เท่านั้น

$$\begin{aligned}
F(s) &= B + \frac{Z(s) \text{ (m order)}}{P(s) \text{ (n order)}} , m < n \\
&= B + \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \\
&= B + \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_1)^k \dots (s + p_n)}
\end{aligned}$$

แยกออกเป็นเศษส่วนได้เป็น

$$\begin{aligned}
F(s) &= B + \frac{C_{11}}{s + p_1} + \frac{C_{21}}{s + p_2} + \dots + \left[\frac{C_{i1}}{s + p_{i1}} + \frac{C_{i2}}{(s + p_{i2})^2} + \dots \right. \\
&\quad \left. \dots + \frac{C_{ik}}{(s + p_{i3})^k} \right] + \dots + \frac{C_{n1}}{s + p_n} \dots
\end{aligned}$$

$$F(s) = B + \frac{C_{11}}{s + p_1} + \frac{C_{21}}{s + p_2} + \dots + \left[\frac{C_{i1}}{s + p_{i1}} + \frac{C_{i2}}{(s + p_{i2})^2} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{C_{ik}}{(s + p_{i3})^k} \right] + \dots + \frac{C_{n1}}{s + p_n} \dots$$

เมื่อ

$$B = \begin{cases} = \text{ผลบวกของโพลีโนเมียลของ } s & \text{เมื่อ } q > n \\ = \text{ค่าคงที่} & \text{เมื่อ } q = n \\ = 0 & \text{เมื่อ } q < n \end{cases}$$

$-p_1, -p_2, -p_3, \dots, -p_n$ = รากโดด (distinct roots)

$-p_i$ = รากซ้ำ (repeated roots) ซึ่งซ้ำกัน k ครั้ง

$C_{11}, C_{12}, \dots, C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{ik}, \dots, C_{n1}$ = ค่าคงที่

EXAMPLE

จาก
$$F(s) = \frac{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 6s + 5}{s^2 + 3s + 2}$$

พบว่า $q = 4$ และ $n = 2$ ถ้า $q > n \rightarrow$ เป็นเศษเกิน

ต้องแยกเป็นจำนวนเต็ม
และ เศษเหมาะสม

จะได้
$$F(s) = s^2 + s + 1 + \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

$$F(s) = s^2 + s + 1 + \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

$B = s^2 + s + 1$ = ผลรวมของพหุนามของ s

$$\frac{Z(s)}{P(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{(s + p_1)(s + p_2)} = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

$$\begin{aligned} m &= 1, n = 2 \\ p_1 &= 1, p_2 = 2 \\ b_1 &= 1, b_0 = 3 \end{aligned}$$

รากโดด (Distinct Roots)

$$\begin{aligned}\frac{Z(s)}{P(s)} &= \frac{Z(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0} \\ &= \frac{Z(s)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)\dots(s + p_n)}\end{aligned}$$

แยกเป็นเศษส่วนย่อย

$$\frac{Z(s)}{P(s)} = \frac{C_{11}}{s + p_1} + \frac{C_{21}}{s + p_2} + \frac{C_{31}}{s + p_3} + \dots + \frac{C_{n1}}{s + p_n}$$

ต้องการหาค่า $C_{11} \ C_{21} \ \dots \ C_{n1}$

หาค่า C_{11} โดยคูณด้วย $(s+p_1)$ ทั้งสองข้างสมการ

$$(s + p_1) \frac{Z(s)}{P(s)} = C_{11} + (s + p_1) \left[\frac{C_{21}}{s + p_2} + \frac{C_{31}}{s + p_3} + \dots + \frac{C_{n1}}{s + p_n} \right]$$

แทนค่า $s = -p_1$ ทางขวามือของสมการจะเหลือค่า C_{11} นอกนั้นเป็น 0

$$C_{11} = (s + p_1) \frac{Z(s)}{P(s)} \Big|_{s = -p_1}$$

หาค่า C_{21} โดยคูณด้วย $(s+p_2)$ ทั้งสองข้างสมการ

$$(s + p_2) \frac{Z(s)}{P(s)} = C_{21} + (s + p_2) \left[\frac{C_{11}}{(s + p_1)} + \frac{C_{31}}{s + p_3} + \dots + \frac{C_{n1}}{s + p_n} \right]$$

แทนค่า $s = -p_2$ จะได้

$$C_{21} = (s + p_2) \frac{Z(s)}{P(s)} \Big|_{s = -p_2}$$

สรุปเป็นสูตรได้เป็น

$$C_{j1} = (s + p_j) \frac{Z(s)}{P(s)} \Big|_{s = -p_j}$$

เมื่อ $j = 1, 2, 3, \dots, n$ เป็น ตำแหน่งของรากที่ต้องการหาสัมประสิทธิ์

เมื่อแปลงลาปลาซกลับ จะได้

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Z(s)}{P(s)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_{11}}{s+p_1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_{21}}{s+p_2}\right\} + \dots + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_{n1}}{s+p_n}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Z(s)}{P(s)}\right\} = C_{11}e^{-p_1t} + C_{21}e^{-p_2t} + \dots + C_{n1}e^{-p_nt}$$

เมื่อ $s = -p_1, -p_2, \dots, -p_n$

= ค่าของรากโหนดของ $P(s)$

EXAMPLE # 10

จงแยกเป็นเศษส่วนย่อยและหาค่าต่างๆของ $f(t)$ เมื่อ $F(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

$$F(s) = \frac{C_{11}}{(s+1)} + \frac{C_{21}}{(s+2)} + \frac{C_{31}}{(s+3)}$$

หา C_{11} โดยคูณ $(s+1)$ ทั้งสองข้างสมการ

$$(s+1) \frac{s^2 + 3s + 1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = C_{11} + (s+1) \left[\frac{C_{21}}{(s+2)} + \frac{C_{31}}{(s+3)} \right]$$

แทนค่า $s = -1$ จะได้

$$(s+1) \frac{s^2 + 3s + 1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \Big|_{s=-1} = C_{11} + 0$$

$$C_{11} = \frac{(-1)^2 + 3(-1) + 1}{(-1+2)(-1+3)} = \frac{1-3+1}{(1)(2)} = -\frac{1}{2}$$

หา C_{21} โดยคูณ $(s+2)$ ทั้งสองข้างสมการ

$$(s+2) \frac{s^2 + 3s + 1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = C_{21} + (s+2) \left[\frac{C_{11}}{(s+1)} + \frac{C_{31}}{(s+3)} \right]$$

แทนค่า $s = -2$ จะได้

$$(s+2) \frac{s^2 + 3s + 1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \Big|_{s=-2} = C_{21} + 0$$

$$C_{21} = \frac{(-2)^2 + 3(-2) + 1}{(-2+1)(-2+3)}$$

$$= \frac{4 - 6 + 1}{(-1)(1)} = 1$$

หา C_{31} โดยคูณ $(s+3)$ ทั้งสองข้างสมการ

$$(s+3) \frac{s^2 + 3s + 1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = C_{31} + (s+3) \left[\frac{C_{11}}{(s+1)} + \frac{C_{21}}{(s+2)} \right]$$

แทนค่า $s = -3$ จะได้

$$(s+3) \frac{s^2 + 3s + 1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \Big|_{s=-3} = C_{31} + 0$$

$$\begin{aligned} C_{31} &= \frac{(-3)^2 + 3(-3) + 1}{(-3+1)(-3+2)} \\ &= \frac{9-9+1}{(-2)(-1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

จะได้

$$F(s) = \frac{-\frac{1}{2}}{(s+1)} + \frac{1}{(s+2)} + \frac{\frac{1}{2}}{(s+3)}$$

แปลงกลับลาปลาซ

$$\mathcal{L}^{-1}F(s) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} + 1\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)}\right\}$$

$$f(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$$

รากซ้ำ (Repeated Roots)

$$\begin{aligned}\frac{Z(s)}{P(s)} &= \frac{Z(s)}{s_n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0} \\ &= \frac{Z(s)}{(s + p_1)^n}\end{aligned}$$

แยกเป็นเศษส่วนย่อย

$$\frac{Z(s)}{P(s)} = \frac{C_{11}}{(s + p_1)} + \frac{C_{12}}{(s + p_1)^2} + \frac{C_{13}}{(s + p_1)^3} + \dots + \frac{C_{1n}}{(s + p_1)^n}$$

ต้องการหาค่า $C_{11} C_{12} \dots C_{1n}$

หา C_{1n} โดยคูณด้วย $(s + p_1)^n$ ทั้งสองข้างสมการ

$$(s + p_1)^n \frac{Z(s)}{P(s)} = (s + p_1)^n \left(\frac{C_{11}}{(s + p_1)} + \frac{C_{12}}{(s + p_1)^2} + \dots + \frac{C_{1n}}{(s + p_1)^n} \right)$$

$$(s + p_1)^n \frac{Z(s)}{P(s)} = C_{11}(s + p_1)^{n-1} + C_{12}(s + p_1)^{n-2} + \dots$$

$$\dots + C_{1n-2}(s + p_1)^2 + C_{1n-1}(s + p_1) + C_{1n} \quad (1)$$

แทนค่า $s = -p_1$ จะได้ค่าของ C_{1n} เป็น

$$(s + p_1)^n \frac{Z(s)}{P(s)} \Big|_{s=-p_1} = C_{1n} + 0$$

$$C_{1n} = (s + p_1)^n \frac{Z(s)}{P(s)} \Big|_{s=-p_1}$$

หาค่า C_{1n-1} จากเทอม $C_{1n-1}(s+p_1)$ โดยทำการอนุพันธ์เทียบกับ s เพราะว่า

$$\frac{d}{ds}(s + p_1) = 1 \quad \text{จะได้}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left((s + p_1)^n \frac{Z(s)}{P(s)} \right) &= C_{11}(n-1)(s + p_1)^{n-2} + C_{12}(n-2)(s + p_1)^{n-3} + \dots \\ &\dots + C_{1n-2}2(s + p_1) + C_{1n-1}1 + 0 \end{aligned} \quad (2)$$

เลือก $s = -p_1$ จะได้ค่า C_{1n-1} เป็น

$$C_{1n-1} = \frac{d}{ds} \left((s + p_1)^n \frac{Z(s)}{P(s)} \right) \Big|_{s=-p_1}$$

หาค่า C_{1n-2} โดยทำการอนุพันธ์สมการ (2) เทียบกับ S

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \left((s + p_1)^n \frac{Z(s)}{P(s)} \right) &= C_{11}(n-1)(n-2)(s + p_1)^{n-3} + \dots \\ &+ C_{12}(n-2)(n-3)(s + p_1)^{n-4} + \dots + C_{1n-2} 2 \times 1 + 0 \end{aligned} \quad (3)$$

เลือก $s = -p_1$ จะได้ค่า C_{1n-2} เป็น

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \left((s + p_1)^n \frac{Z(s)}{P(s)} \right) \right|_{s=-p_1} = C_{1n-2} 2!$$

$$C_{1n-2} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left((s + p_1)^n \frac{Z(s)}{P(s)} \right) \bigg|_{s=-p_1}$$

หาค่า C_{1n-3} โดยทำการอนุพันธ์สมการ (3) เทียบกับ s และเลือก $s = -p_1$

$$C_{1n-3} = \frac{1}{3!} \frac{d^3}{ds^3} \left((s + p_1)^n \frac{Z(s)}{P(s)} \right) \Big|_{s=-p_1} \quad (4)$$

สมมติ $n - 3 = r$ จะได้ $n - r = 3 \rightarrow$ แทนในสมการ (4)

$$C_{1r} = \frac{1}{(n-r)!} \frac{d^{n-r}}{ds^{n-r}} \left((s + p_1)^n \frac{Z(s)}{P(s)} \right) \Big|_{s=-p_1} \quad (5)$$

เมื่อ $1 =$ ตำแหน่งของรากซึ่งมีตำแหน่งเดียว

$$r = 1, 2, 3, \dots, n$$

$n =$ จำนวนที่ซ้ำกันของรากของ $P(s)$

สมมติ $n = 1 \rightarrow$ รากโคค และ ตำแหน่งของรากเป็น j

• ดังนั้น $r = 1 \rightarrow (n - r)! = (1 - 1)! = 0 \rightarrow$ ไม่ต้องหาอนุพันธ์

เขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$C_{j1} = (s + p_j) \frac{Z(s)}{P(s)} \Big|_{s=-p_j}$$

เพราะฉะนั้นสมการ (5) ใช้ในกรณีรากโคคได้ โดย $n = 1$ เป็นผลให้ $r = 1$
และ $j = 1, 2, \dots$ จำนวนราก

สรุป สมการ (5) สามารถใช้ได้ทั้งกรณีรากโคคและรากซ้ำได้

ถ้า
$$\frac{Z(s)}{P(s)} = \frac{Z(s)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_i)^k \dots (s + p_n)}$$

$$\frac{Z(s)}{P(s)} = \frac{C_{11}}{s + p_1} + \frac{C_{21}}{s + p_2} + \dots + \left[\frac{C_{i1}}{(s + p_i)} + \frac{C_{i2}}{(s + p_i)^2} + \dots + \frac{C_{ik}}{(s + p_i)^k} \right] + \dots$$

$$\dots + \frac{C_{n1}}{s + p_n}$$

สูตรทั่วไปของการหาค่าสัมประสิทธิ์

$$C_{jr} = \frac{1}{(k-r)!} \frac{d^{k-r}}{ds^{k-r}} \left((s + p_j)^k \frac{Z(s)}{P(s)} \right) \Big|_{s=-p_j}$$

$r = 1, 2, \dots, k$
 $k =$ จน.ครั้งที่รากซ้ำกัน
 ของรากซ้ำที่ j
 $j = 1, 2, \dots, i, \dots, n$
 $n =$ ตำแหน่งของราก

EXAMPLE # 11

จงแยก $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^3}$ ออกเป็นเศษส่วนย่อย และหา $f(t)$

แยก $F(s)$ เป็นเศษส่วนย่อย

$$F(s) = \frac{C_{11}}{(s+1)} + \frac{C_{21}}{(s+2)} + \frac{C_{22}}{(s+2)^2} + \frac{C_{23}}{(s+2)^3}$$

จาก

$$C_{jr} = \frac{1}{(k-r)!} \frac{d^{k-r}}{ds^{k-r}} \left((s+p_j)^k \frac{Z(s)}{P(s)} \right) \Big|_{s=-p_j}$$

จะได้

$$C_{11} = (s+1) \frac{1}{(s+1)(s+2)^3} \Big|_{s=-1} = 1$$

$$C_{jr} = \frac{1}{(k-r)!} \frac{d^{k-r}}{ds^{k-r}} \left((s+p_j)^k \frac{Z(s)}{P(s)} \right) \Big|_{s=-p_j}$$

ຈະໄດ້

$$C_{23} = (s+2)^3 \frac{1}{(s+1)(s+2)^3} \Big|_{s=-2} = -1$$

$$C_{22} = \frac{1}{(3-2)!} \frac{d^{3-2}}{ds^{3-2}} \left((s+2)^3 \frac{1}{(s+1)(s+2)^3} \right) \Big|_{s=-2}$$

$$= \frac{1}{(1)!} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{(s+1)} \right) \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{(s+1)^2} \Big|_{s=-2} = -1$$

$$C_{21} = \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^{3-1}}{ds^{3-1}} \left((s+2)^3 \frac{1}{(s+1)(s+2)^3} \right) \Big|_{s=-2}$$

$$= \frac{1}{(2)!} \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{(s+1)} \right) \Big|_{s=-2} = \frac{1}{2} (-1) \frac{(-2)}{(s+1)^3} \Big|_{s=-2} = -1$$

$$F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{1}{(s+2)^3}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)(s+2)^3} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} - .. \\ &.. - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^2} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^3} \right\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)(s+2)^3} \right\} = e^{-t} - e^{-2t} - te^{-2t} - \frac{t^2}{2!} e^{-2t}$$

รากเชิงซ้อน (Complex Roots)

$\frac{Z(s)}{P(s)}$ เป็นเศษเหมาะสม มีรากของ $P(s)$ เป็นรากจริงและรากเชิงซ้อน

$$\begin{aligned}\frac{Z(s)}{P(s)} &= \frac{Z(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \\ &= \frac{Z(s)}{(s^2 + \beta_1s + \beta_0)(s + p_3)(s + p_4)\dots(s + p_n)}\end{aligned}$$

แยกเป็นเศษส่วนย่อย

$$\begin{aligned}\frac{Z(s)}{P(s)} &= \frac{\alpha_1s + \alpha_0}{(s^2 + \beta_1s + \beta_0)} + \frac{C_{31}}{(s + p_3)} + \frac{C_{41}}{(s + p_4)} + \dots + \frac{C_{n1}}{(s + p_n)} \\ &= \frac{\alpha_1s + \alpha_0}{(s + p_1)(s + p_2)} + \frac{C_{31}}{(s + p_3)} + \frac{C_{41}}{(s + p_4)} + \dots + \frac{C_{n1}}{(s + p_n)}\end{aligned}$$

โดย $s = -p_1$ และ $s = -p_2$ เป็นรากเชิงซ้อนที่มีค่า conjugate ซึ่งกันและกัน

หาค่า α_1 และ α_0 โดยคูณด้วย $(s + p_1)(s + p_2)$ ทั้งสองข้างสมการ
แทนค่า $s = -p_1$ จะได้

$$\begin{aligned} (s + p_1)(s + p_2) \frac{Z(s)}{P(s)} \Big|_{s=-p_1} &= (\alpha_1 s + \alpha_0) + \dots \\ &+ (s + p_1)(s + p_2) \left(\frac{C_{31}}{(s + p_3)} + \frac{C_{41}}{(s + p_4)} + \dots + \frac{C_{n1}}{(s + p_n)} \right) \Big|_{s=-p_1} \\ &= (\alpha_1 s + \alpha_0) \Big|_{s=-p_1} \end{aligned}$$

$$(\alpha_1 s + \alpha_0) \Big|_{s=-p_1} = (s + p_1)(s + p_2) \frac{Z(s)}{P(s)} \Big|_{s=-p_1}$$

หาค่าจริง และค่าจินตภาพ ของสมการให้เท่ากัน จะหาค่า α_1 และ α_0 ได้

EXAMPLE # 12

จงแยก $F(s) = \frac{s+1}{(s^2 + s + 1)}$ ออกเป็นเศษส่วนย่อย และหา $f(t)$

แยกเป็นเศษส่วนย่อย $F(s) = \frac{s+1}{(s^2 + s + 1)} = \frac{Z(s)}{P(s)}$

$$\text{ให้ } P(s) = (s^2 + s + 1) = 0$$

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$
$$= -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{จะได้ } F(s) = \frac{s+1}{\left(s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \longrightarrow \frac{\alpha_1 s + \alpha_0}{(s + p_1)(s + p_2)}$$

$$F(s) = \frac{C_{11}}{\left(s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{C_{21}}{\left(s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$\text{H1} \quad C_{11} = \left(s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{s+1}{\left(s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \Bigg|_{s=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$C_{11} = \frac{\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}{j\sqrt{3}}$$

$$\text{ห้} \quad C_{21} = \left(s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{s+1}{\left(s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} \bigg|_{s = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$C_{21} = \frac{\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}}{-j\sqrt{3}} = \frac{-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}{j\sqrt{3}}$$

จะได้

$$F(s) = \frac{\frac{\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}{j\sqrt{3}}}{\left(s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} + \frac{\frac{-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}{j\sqrt{3}}}{\left(s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}{j\sqrt{3}}}{\left(s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}{j\sqrt{3}}}{\left(s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right\} \\
&= \left[\frac{\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}{j\sqrt{3}}\right] e^{\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} + \left[\frac{-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}{j\sqrt{3}}\right] e^{\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{-\frac{1}{2}t} \left[\frac{\frac{1}{2}e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{j\sqrt{3}} + \frac{j\frac{\sqrt{3}}{2}e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{j\sqrt{3}} - \frac{\frac{1}{2}e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{j\sqrt{3}} + \frac{j\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{j\sqrt{3}} \right]$$

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[\left(\frac{e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t} + e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t} - e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{2j} \right) \right]$$

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right]$$

วิธีที่ 2 ทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ (Completing the square)

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s+1}{(s^2+s+1)} = \frac{s+1}{\left(\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)} \\ &= \frac{s+1}{\left(\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)} = \frac{s+1}{\left(\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)} \\ &= \frac{\left(s+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\left(\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]}\right\} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]}\right\}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s^2+s+1)}\right\} = e^{-\frac{1}{2}t} \left[\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right]$$