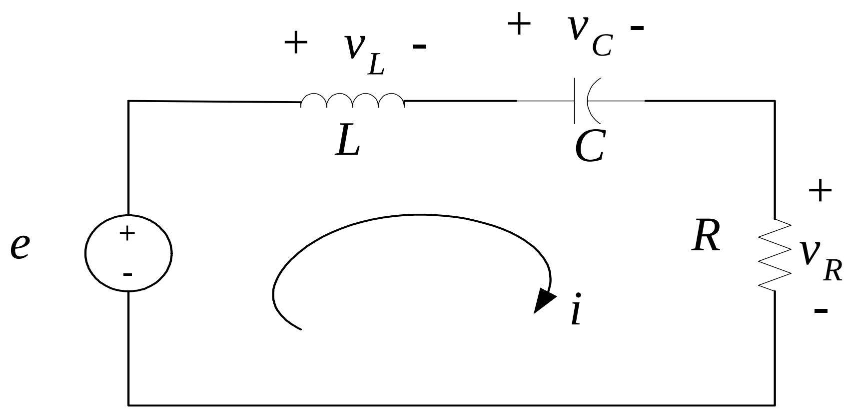
Solutions of Simple Circuits

- ใช้การแปลงลาปลาซแก้สมการอนุพันธ์เชิงเส้น ที่มีค่าสัมประสิทธิ์คงตัว (Linear Time Invarient)
- การหาค่าคำตอบที่ต้องการจากวงจร แบ่งเป็น

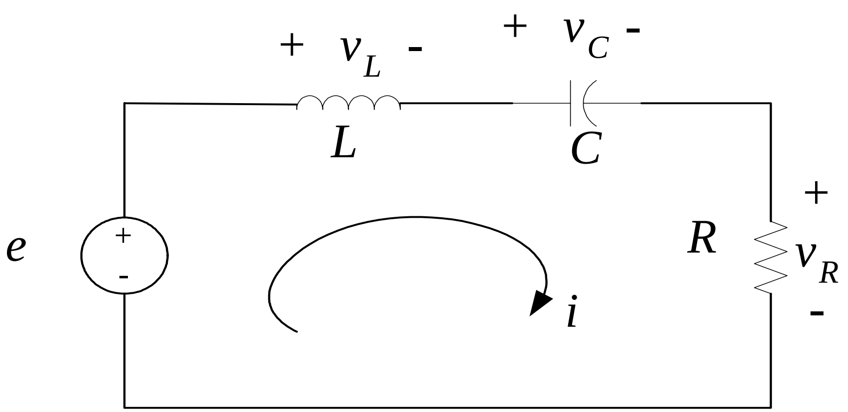
  1. Zero State Response (Initial Condition มีค่าเป็นศูนย์)
  2. Zero Input Response (Input มีค่าเป็นศูนย์)

Complete Response = Zero Input Response + Zero State Response

Calculation of an Impulse Response



- หาผลตอบสนองของวงจรโดยใช้การแปลงลาปลาซ เมื่อกำหนดให้ input เป็นสัญญาณ impulse
- e เป็น input $\delta(t)$
- v_R เป็น Output



Branch Equation

$$i = \frac{v_R}{R}$$

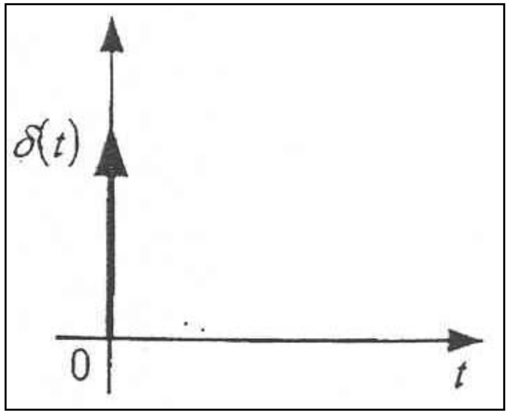
$$v_c(t) = v_c(0-) + \frac{1}{C}\int_{0-}^{t} i(t')dt'$$

$$= v_c(0-) + \frac{1}{RC}\int_{0-}^{t} v_R(t')dt'$$

$$v_L = L\frac{di}{dt} = \frac{L}{R}\frac{dv_R}{dt}$$

KVL : $v_L + v_C + v_R - e = 0$

$$\frac{L}{R}\frac{dv_R}{dt} + v_c(0-) + \frac{1}{RC}\int_{0-}^{t} v_R(t')dt' + v_R = e(t) \qquad \textbf{(1)}$$



เนื่องจากสัญญาณที่เข้ามาเป็น impulse ส่งผลให้วงจรเป็นสภาวะศูนย์ (zero state)ที่เวลา t <= 0-

$$e(t) = \delta(t)$$

$$v_R(0-) = 0$$

$$v_c(0-) = 0$$

$$i_L(0-) = i(0-) = \frac{1}{R} v_R(0-) = 0$$

แทนค่าในสมการ **(1)** ได้เป็น

$$\frac{L}{R}\frac{dv_R}{dt} + \frac{1}{RC}\int_{0-}^{t} v_R(t')dt' + v_R = \delta(t)$$

- กำหนดให้ h คือผลตอบสนอง impulse ที่ต้องการหา
- แทน v_R ด้วย h เนื่องจาก v_R คือ output ของวงจร

$$\frac{L}{R}\frac{dh}{dt}+\frac{1}{RC}\int_{0-}^{t}h(t')dt'+h=\delta(t) \qquad ,h(0-)=0$$

กำหนดให้ $H(s)$ คือ $\mathcal{L}\{h(t)\}$

$$\mathcal{L}\left[\frac{L}{R}\frac{dh}{dt}+\frac{1}{RC}\int_{0-}^{t}h(t')dt'+h\right]=\mathcal{L}[\delta(t)]$$

$$\frac{L}{R}\mathcal{L}\left[\frac{dh}{dt}\right]+\frac{1}{RC}\mathcal{L}\left[\int_{0-}^{t}h(t')dt'\right]+H(s)=1$$

$$\frac{L}{R}[sH(s)]+\frac{1}{RC}\left[\frac{H(s)}{s}\right]+H(s)=1$$

$$\left[\frac{L}{R}s+\frac{1}{RCs}+1\right]H(s)=1$$

จะได้ $$H(s)=\frac{1}{\left[\frac{L}{R}s+\frac{1}{RCs}+1\right]}$$

$$H(s)=\frac{R}{L}\left[\frac{s}{s^2+\left(\frac{R}{L}\right)s+\frac{1}{LC}}\right]$$

$$H(s)=\frac{R}{L}\left[\frac{s}{\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right]$$

<u>กำหนด</u> $$\omega_0{}^2\triangleq\frac{1}{LC}$$

$$\alpha\triangleq\frac{R}{2L}$$

$$\omega_d=\sqrt{\omega_0{}^2-\alpha^2}$$

$$H(s)=\frac{R}{L}\left[\frac{s}{(s+\alpha)^2+{\omega_d}^2}\right]$$

$$H(s)=\frac{R}{L}\left[\frac{(s+\alpha)-\alpha}{(s+\alpha)^2+{\omega_d}^2}\right]$$

แปลงลาปลาซกลับ

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=\frac{R}{L}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+{\omega_d}^2}\right]-\frac{\alpha}{\omega_d}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_d}{(s+\alpha)^2+{\omega_d}^2}\right]\right\}$$

$$h(t)=\frac{R}{L}u(t)e^{-\alpha t}\left(\cos\omega_d t-\frac{\alpha}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)$$

$$h(t)=\frac{\omega_0}{\omega_d}\frac{R}{L}u(t)e^{-\alpha t}\left(\cos\omega_d t+\phi\right)$$

$$\boxed{\phi\overset{\Delta}{=}\sin^{-1}\frac{\alpha}{\omega_0}}$$

Zero – State Response

- หาผลตอบสนองที่มีต่อ input เมื่อวงจรอยู่ในสภาวะ Zero – State คือ การผลตอบสนองเมื่อ Initial Condition มีค่าเป็น **ศูนย์**
- input คือ $e(t)$ และผลการแปลงลาปลาซคือ $E(s)$
- จากวงจรเดิม จะได้

$$\underbrace{\left[\frac{L}{R}s+\frac{1}{RCs}+1\right]V_R(s)}_{\text{Laplace of Zero - State Response}} = \underbrace{E(s)}_{\text{Laplace of Input}}$$

$$V_R(s) = \left[\frac{R}{L}\frac{s}{s^2+\left(\frac{R}{L}\right)s+\frac{1}{LC}}\right]E(s) \rightarrow V_R(s) = H(s)E(s)$$

$$\boxed{V_R(s) = H(s)E(s)}$$

- เราเรียก $H(s) = \text{Network Function}$

$$= \frac{\text{Laplace of Zero-State response}}{\text{Laplace of Input}}$$

จะได้

$$\boxed{(\mathcal{L}\ \text{of Zero-State Response}) = (\text{Network Function})*(\mathcal{L}\ \text{of Input})}$$

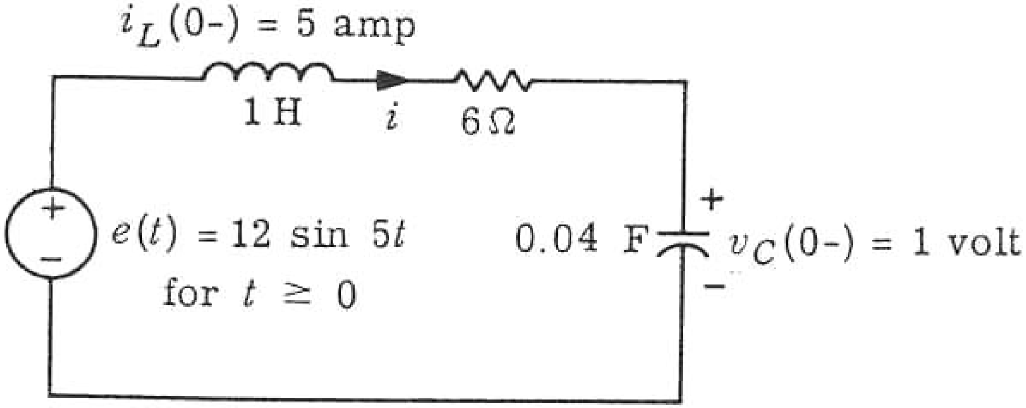
- ในกรณี input เป็น impulse signal จะได้ $\longrightarrow$ $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

ดังนั้น $(\mathcal{L}\ \text{of Zero-State Response}) = (\text{Network Function})$

The Complete Response

- ผลตอบของวงจรต่อทั้ง input และมีภาวะเริ่มแรก (initial condition)
- ผลรวมของผลตอบที่ไม่มี input กับ ผลตอบแห่งสถานะศูนย์

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L} \text{ of Complete Response} &= \mathcal{L} \text{ of Zero - State Response} \\ &\quad + \mathcal{L} \text{ of Zero - Input Response}\end{aligned}}$$



หากระแส i

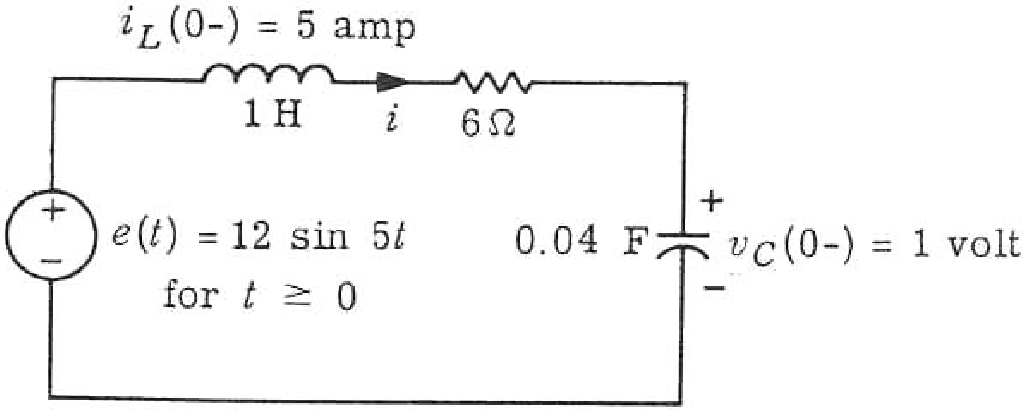
KVL : $v_L + v_R + v_C = e(t)$

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_{0-}^{t} i(t')dt' + v_C(0-) = e(t) \qquad \text{for } t \geq 0$$

แปลงลาปลาซทั้งสองข้างสมการ

$$L\left[sI(s) - i_L(0-)\right] + RI(s) + \frac{1}{C}\left[\frac{I(s)}{s}\right] + \frac{v_C(0-)}{s} = E(s)$$

$$\frac{L}{s}\left[s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right]I(s) = E(s) + Li_L(0-) - \frac{v_C(0-)}{s}$$



แทนค่า

$L = 1$, $R = 6$, $C = 0.04$

$i_L(0\text{-}) = 5$, $v_C(0\text{-}) = 1$

$$\frac{1}{s}\left[s^2 + \frac{6}{1}s + \frac{1}{(1)(0.04)}\right]I(s) = E(s) + (1)(5) - \frac{(1)}{s}$$

$$\left[s^2 + 6s + 25\right]I(s) = s\left(E(s) + 5 - \frac{1}{s}\right)$$

$$I(s) = \frac{1}{\left(s^2 + 6s + 25\right)}\left(sE(s) + 5s - 1\right)$$

$$I(s) = \frac{1}{\left((s+3)^2 + 4^2\right)}\left(sE(s) + 5s - 1\right)$$

$$I(s)=\frac{s}{(s+3)^2+4^2}E(s)+\frac{5s-1}{(s+3)^2+4^2}$$

$$=\quad \underbrace{I_0(s)}_{\text{Zero - State}} \quad + \quad \underbrace{I_i(s)}_{\text{Zero - Input}}$$

- Complete Response แบ่งเป็น 2 ส่วน - input (Zero-State)

  - initial condition (Zero-Input)

<u>หา Zero - State Response, $I_0(s)$</u>

จาก $e(t) = 12\sin 5t$ for $t >= 0$

$$E(s)=\mathcal{L}\{e(t)\}=12\frac{5}{s^2+5^2}$$

$$I_0(s)=\left(\frac{s}{(s+3)^2+4^2}\right)\left(12\frac{5}{s^2+5^2}\right)$$

$$I_0(s) = \frac{60s}{\left((s+3)^2+4^2\right)\left(s^2+5^2\right)}$$

แยกเป็นเศษส่วนย่อย

$$I_0(s) = \frac{K_1}{s+3-j4} + \frac{\overline{K_1}}{s+3+j4} + \frac{K_3}{s-j5} + \frac{\overline{K_3}}{s+j5}$$

หาค่าคงตัว

$$K_1 = (s+3-j4)\,I_0(s)\Big|_{s=-3+j4}$$

$$= (s+3-j4)\frac{60s}{(s+3-j4)(s+3+j4)\left(s^2+5^2\right)}\Bigg|_{s=-3+j4}$$

$$= j1.25$$

$$K_3 = (s-j5)\,I_0(s)\Big|_{s=j5} = -j$$

$$I_0(s) = \frac{j1.25}{s+3-j4} + \frac{-j1.25}{s+3+j4} + \frac{-j}{s-j5} + \frac{j}{s-j5}$$

<u>Inverse Laplace</u>

$$\mathcal{L}^{-1}\{I_0(s)\} = j1.25\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+(3-j4)}\right\} - j1.25\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+(3+j4)}\right\} -$$

$$- j\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-j5}\right\} + j\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+j5}\right\}$$

$$= j1.25e^{-(3-j4)t} - j1.25e^{-(3+j4)t} - je^{j5t} + je^{-j5t}$$

$$= j1.25e^{-3t}\left[e^{j4t} - e^{-j4t}\right] + j\left[-e^{j5t} + je^{-j5t}\right]$$

$$= j1.25e^{-3t}(2j)\left[\frac{e^{j4t} - e^{-j4t}}{2j}\right] + j(2j)\left[\frac{-e^{j5t} + je^{-j5t}}{2j}\right]$$

$$\boxed{i_0(t) = -2.5e^{-3t}\sin 4t + 2\sin 5t}$$

หา Zero - Input Response, $I_i(s)$

$$I_i(s) = \frac{5s-1}{(s+3)^2+4^2}$$

$$= \frac{5\left(s+3-3\right)-1}{(s+3)^2+4^2} = \frac{5\left(s+3\right)-16}{(s+3)^2+4^2}$$

$$= \frac{5(s+3)}{(s+3)^2+4^2} - \frac{16}{(s+3)^2+4^2}$$

$$= 5\left[\frac{\left(s+3\right)}{(s+3)^2+4^2}\right] - \frac{16}{4}\left[\frac{4}{(s+3)^2+4^2}\right]$$

Inverse Laplace

$$i_i(t) = 5e^{-3t}\cos 4t - 4e^{-3t}\sin 4t$$

หา Complete Response

$$\boxed{i(t) = i_0(t) + i_i(t)}$$

$$i(t) = -2.5e^{-3t}\sin 4t + 2\sin 5t + 5e^{-3t}\cos 4t - 4e^{-3t}\sin 4t \qquad ,\text{for } t \geq 0$$

$$i(t) = \underbrace{5e^{-3t}\cos 4t - 6.5e^{-3t}\sin 4t}_{\text{Transient Response}} + \underbrace{2\sin 5t}_{\text{Steady-State Response}} \qquad ,\text{for } t \geq 0$$

- Transient Response มาจาก initial state และ input sinusoidal

Solutions of General Networks

- ใช้การแปลงลาปลาซแก้สมการอนุพันธ์ของวงจรข่าย ที่มีสัมประสิทธิเป็นค่าคงที่
- เขียนสมการเพื่อหาคำตอบ (output) ที่ต้องการได้ด้วยวิธี Node, Mesh, Loop และ Cut-Set

Node equation	$Y_n e = i_s$	$\rightarrow$ KCL	$\rightarrow$ ตัวแปรติด e
Mesh equation	$Z_m i = e_s$	$\rightarrow$ KVL	$\rightarrow$ ตัวแปรติด i
Loop equation	$Z_l i = e_s$	$\rightarrow$ KVL	$\rightarrow$ ตัวแปรติด i
Cut-Set equation	$Y_q e = i_s$	$\rightarrow$ KCL	$\rightarrow$ ตัวแปรติด e

- ตัวอย่างการเขียนสมการอนุพันธ์ของวงจรข่าย ด้วย Node Equation

$$\boxed{Y_n(D)e = i}$$

เมื่อ

	e	→	Node-to-datum Voltage Vector
	i	→	Node Current Source
	Yn(D)	→	Node Admittance Matrix
	$D = \dfrac{d}{dt}$	→	Differential Operator
	$D^{-1}(\bullet) = \int_0^t (\bullet)dt$	→	Integration Operator

- การแปลงลาปลาซของ Node Equation คือ

$$\boxed{Yn(s)E(s)=I(s)+a}$$

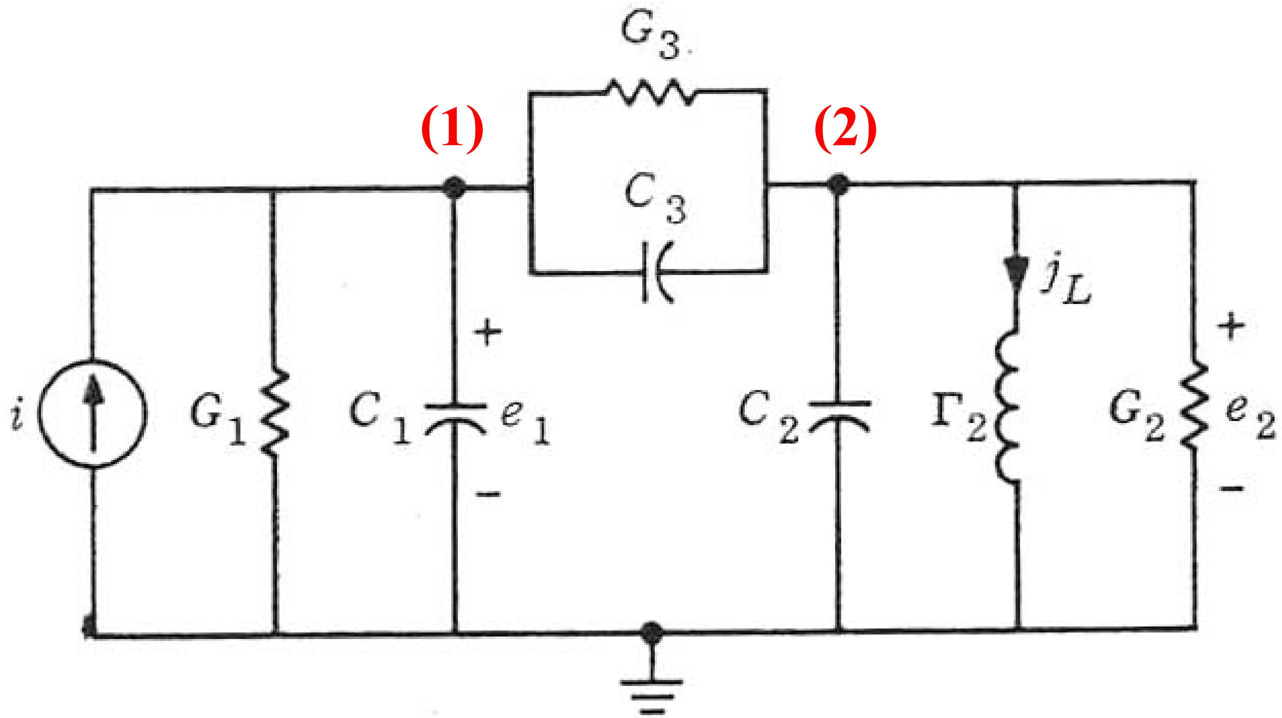
เมื่อ a → เวกเตอร์ที่ประกอบด้วยค่าจากภาวะ initial condition

EXAMPLE # 13

From The Circuit ; The Input is the Current i

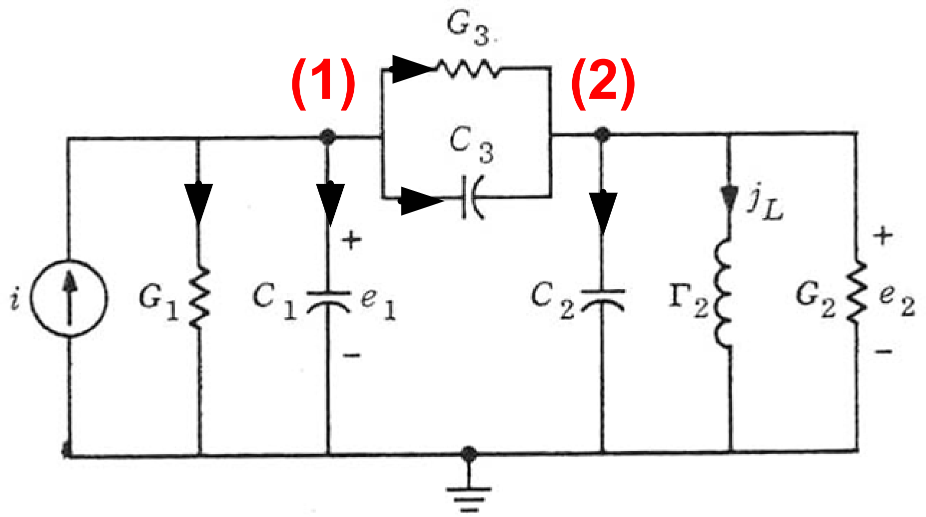
The Response of interest is Voltage e_2

Using e_1 , e_2 as variable



$$G = \frac{1}{R}$$

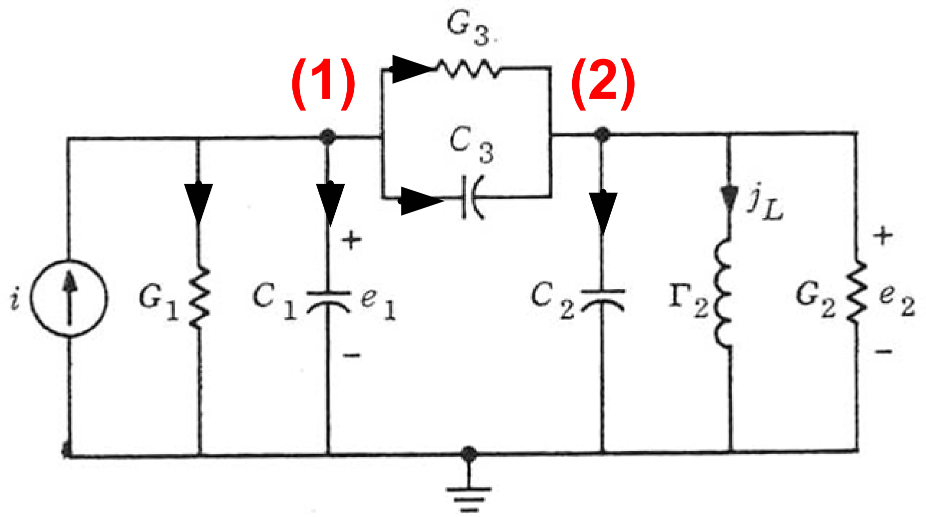
$$\Gamma = \frac{1}{L}$$



<u>Node (1)</u> หา KCL : $j_{G1} + j_{C1} + j_{C3} + j_{G3} = i$

$$G_1 e_1 + C_1 \frac{de_1}{dt} + C_3 \frac{d\left(e_1 - e_2\right)}{dt} + G_3\left(e_1 - e_2\right) = i$$

$$(C_1 + C_3)\frac{d}{dt}e_1 + (G_1 + G_3)e_1 - \left(C_3 \frac{d}{dt}e_2 + G_3 e_2\right) = i$$



<u>Node (2)</u> หา KCL : $-j_{C3} - j_{G3} + j_{C2} + j_{\Gamma 2} + j_{G2} = 0$

$$-C_3 \frac{d(e_1 - e_2)}{dt} - G_3(e_1 - e_2) + C_2 \frac{d}{dt} e_2 + \left(\Gamma_2 \int_{0-}^{t} e_2(t')dt' + j_L(0-) \right) + G_2 e_2 = 0$$

$$-\left(C_3 \frac{d}{dt} e_1 + G_3 e_1 \right) + (C_2 + C_3) \frac{d}{dt} e_2 + (G_2 + G_3) e_2$$

$$+\Gamma_2 \int_{0-}^{t} e_2(t')dt' + j_L(0-) = 0$$

แปลงลาปลาซสมการ node (1) และ (2)

Node (1)

$$\mathcal{L}\left\{(C_1+C_3)\frac{d}{dt}e_1+(G_1+G_3)e_1-\left(C_3\frac{d}{dt}e_2+G_3e_2\right)\right\}=\mathcal{L}\{i\}$$

$$(C_1+C_3)\big(sE_1(s)-e_1(0-)\big)+(G_1+G_3)E_1(s)-C_3\big(sE_2(s)-e_2(0-)\big)$$
$$+G_3E_2(s)=I(s)$$

$$\left[(C_1+C_3)s+(G_1+G_3)\right]E_1(s)-(C_3s+G_3)E_2(s)$$
$$=I(s)+\underbrace{e_1(0-)(C_1+C_3)-e_2(0-)C_3}_{a_1}$$

Node (2)

$$\mathcal{L}\left\{\begin{aligned}&-\left(C_3\frac{d}{dt}e_1+G_3e_1\right)+\left(C_2+C_3\right)\frac{d}{dt}e_2+(G_2+G_3)e_2\\&\qquad+\Gamma_2\int_{0-}^{t}e_2(t')dt'+j_L(0-)\end{aligned}\right\}=\mathcal{L}\{0\}$$

$$-C_3\left(sE_1(s)-e_1(0-)\right)-G_3E_1\left(s\right)+\left(C_2+C_3\right)\left(sE_2(s)-e_2(0-)\right)$$
$$+(G_2+G_3)E_2(s)+\Gamma_2\frac{E_2(s)}{s}+\frac{j_L(0-)}{s}=0$$

$$-\left(C_3s+G_3\right)E_1(s)+\left[(C_2+C_3)s+(G_2+G_3)+\frac{\Gamma_2}{s}\right]E_2(s)$$
$$=0\underbrace{-e_1(0-)C_3+e_2(0-)(C_2+C_3)-\frac{j_L(0-)}{s}}_{a_2}$$

เขียนในรูป $\boxed{Yn(s)E(s)=I(s)+a}$ ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} (C_1+C_3)s+(G_1+G_3) & -\left(C_3s+G_3\right) \\ -\left(C_3s+G_3\right) & (C_2+C_3)s+(G_2+G_3)+\dfrac{\Gamma_2}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I(s) \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

เมื่อ

$$a_1 = e_1(0-)(C_1+C_3)-e_2(0-)C_3$$

$$a_2 = -e_1(0-)C_3+e_2(0-)(C_2+C_3)-\frac{j_L(0-)}{s}$$

The Cofactor Method

- จาก $\mathbf{Y_n(s)E(s) = F(s)}$

  เมื่อ **F(s)** → เวกเตอร์ขนาด n ที่แสดงถึง The Forcing Function (รวม initial condition)

- ดังนั้น **E(**s) ที่ต้องการหา คือ $\mathbf{E(s)} = \mathbf{Y_n^{-1}(s)F(}s)$
- แต่ว่าการที่จะหา **E(s)** ได้ ต้องหา Yn-1 ก่อน ซึ่งค่อนข้างยุ่งยาก
- เพราะฉะนั้นหา **E(s)** เฉพาะค่าที่โจทย์ถามเท่านั้น โดยวิธี **"Cofactor"**

- จาก **$\mathbf{Y_n(s)E(s) = F(s)}$** เขียนในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

- สิ่งที่ต้องการหา คือ E_j
- <u>กำหนดให้</u> $\Delta_n(s) \stackrel{\Delta}{=} \det Y_n(s)$

  $\Delta_n(s)$ เรียกว่า "**Network Determinant on the node basis**"
- <u>กำหนดให้</u> $\Delta_{ij} \stackrel{\Delta}{=}$ cofactor of Y_{ij}

  $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \times \det$ ของ $Y_n(s)$ ที่ตัดแถว i และหลัก j ออกไปแล้ว

จะได้ $$\boxed{\sum_{i=1}^{n} Y_{ij}(s)\Delta_{ij}(s) = \Delta_n(s)}$$ สำหรับทุกค่า s

- กรณีที่ k เป็นจำนวนนับที่ค่าแตกต่างจาก j , $(k \neq j)$ จะได้

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} Y_{ik}(s)\Delta_{ij}(s) = 0}$$ สำหรับทุกค่า s

- คูณเมตริกซ์ $\mathbf{Y_n(s)E(s) = F(s)}$ ด้วย $\sum_{k=1}^{n} \Delta_{kj}(s)$

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_{kj}(s) \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{kj}(s) \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_{kj}(s)\left[Y_{kj}(s)E_j(s)\right] = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{kj}(s)F_k(s)$$

$$\left[\sum_{k=1}^{n} Y_{kj}(s)\Delta_{kj}(s)E_j(s)\right] = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{kj}(s)F_k(s)$$

$$\Delta_n(s)E_j(s) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{kj}(s)F_k(s)$$

จะได้

$$\boxed{E_j(s) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta_{kj}(s)F_k(s)}{\Delta_n(s)}}$$

EXAMPLE # 14

หา $E_2(s)$ จากสมการ

$$\begin{bmatrix} (C_1+C_3)s+(G_1+G_3) & -\left(C_3s+G_3\right) \\ -\left(C_3s+G_3\right) & (C_2+C_3)s+(G_2+G_3)+\dfrac{\Gamma_2}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I(s) \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

หา $\Delta_n(s)$ ได้เท่ากับ

$$\Delta_n(s)=\left[(C_1+C_3)s+(G_1+G_3)\right]\left[(C_2+C_3)+(G_2+G_3)+\frac{\Gamma_2}{s}\right]-\left[C_3s+G_3\right]\left[C_3s+G_3\right]$$

$$\begin{aligned}\Delta_n(s)=&(C_1C_2+C_2C_3+C_3C_1)s^2\\ &+(G_1C_2+G_1C_3+G_3C_2+G_2C_1+G_2C_3+G_3C_1)s\\ &+\left(C_1\Gamma_2+C_3\Gamma_2+G1G2+G_1G_3+G_2G_3\right)+\left(G_1+G_3\right)\frac{\Gamma 2}{s}\end{aligned}$$

จาก

$$\boxed{E_j(s)=\frac{\sum_{k=1}^{n}\Delta_{kj}(s)F_k(s)}{\Delta_n(s)}}$$

$$E_2(s)=\frac{\sum_{k=1}^{2}\Delta_{k2}(s)F_k(s)}{\Delta_n(s)}$$

$$=\frac{\Delta_{12}(s)F_1(s)}{\Delta_n(s)}+\frac{\Delta_{22}(s)F_2(s)}{\Delta_n(s)}$$

จาก $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \times \det$ ของ $Y_n(s)$ ที่ตัดแถว i และหลัก j ออกไปแล้ว

$$\Delta_{12}=\left(-1\right)^3 y_{21}=C_3 s+G_3$$

$$\Delta_{22}=\left(-1\right)^4 y_{11}=\left(C_1+C_3\right)s+\left(G_1+G_3\right)$$

$$F_1(s) = I(s) + a_1(s)$$

$$F_2(s) = 0 + a_2(s)$$

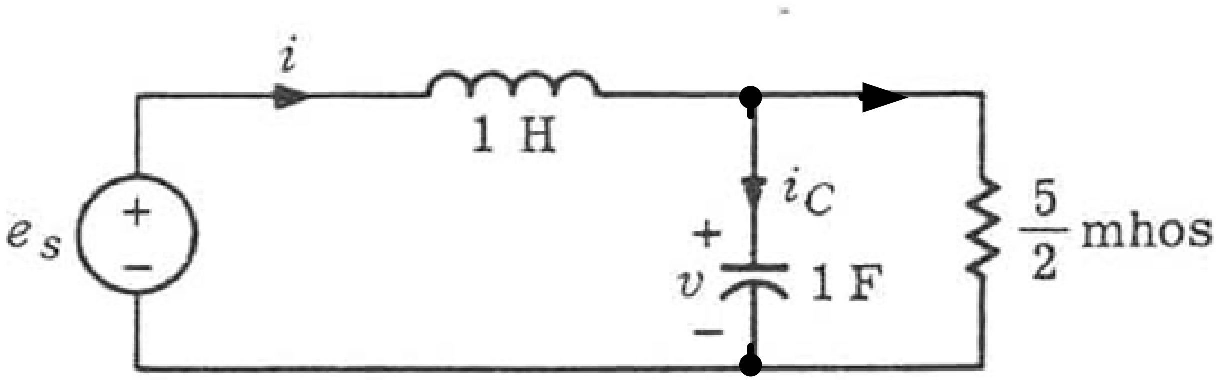
$$E_2(s) = \frac{\Delta_{12}(s)\left(I(s) + a_1(s)\right)}{\Delta_n(s)} + \frac{\Delta_{22}(s)\left(0 + a_2(s)\right)}{\Delta_n(s)}$$

$$= \frac{\Delta_{12}(s)I(s) + \Delta_{12}(s)a_1(s) + \Delta_{22}(s)a_2(s)}{\Delta_n(s)}$$

$$= \frac{\Delta_{12}(s)I(s)}{\Delta_n(s)} + \left[\frac{\Delta_{12}(s)a_1(s) + \Delta_{22}(s)a_2(s)}{\Delta_n(s)}\right]$$

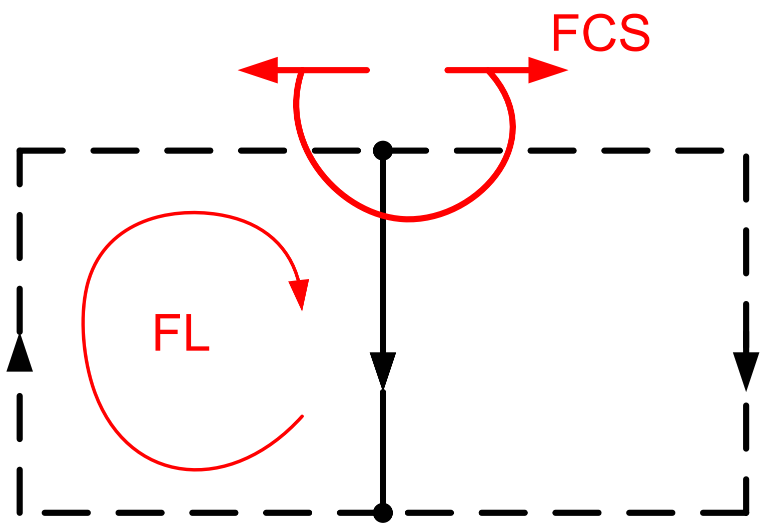
$$\boxed{\underbrace{E_2(s)}_{\text{Laplace transform of complete response}} = \underbrace{\frac{\Delta_{12}(s)I(s)}{\Delta_n(s)}}_{\text{Laplace transform of zero-state response}} + \underbrace{\frac{\sum_{k=1}^{n}\Delta_{k2}(s)a_k(s)}{\Delta_n(s)}}_{\text{Laplace transform of zero-input response}}}$$

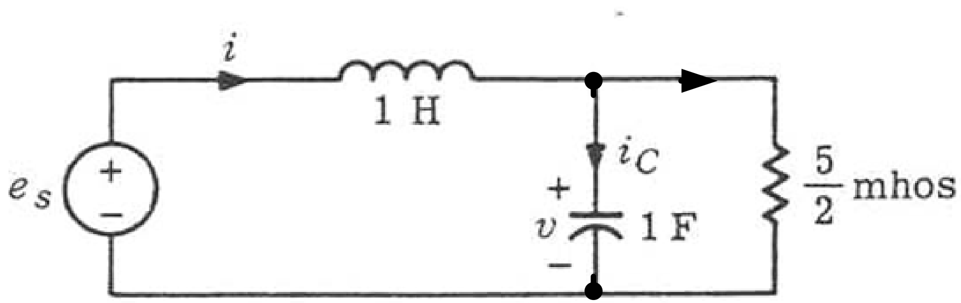
State Equation

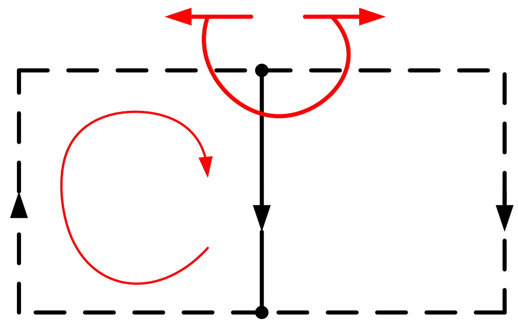


จากวงจรมี 3 กิ่ง 2 โนด → กิ่งทรี $= n - 1 = 2 - 1 = 1$

→ กิ่งลิงค์ $= b - n + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$







<u>Cut-Set</u> : $- i_L + i_C + i_R = 0$

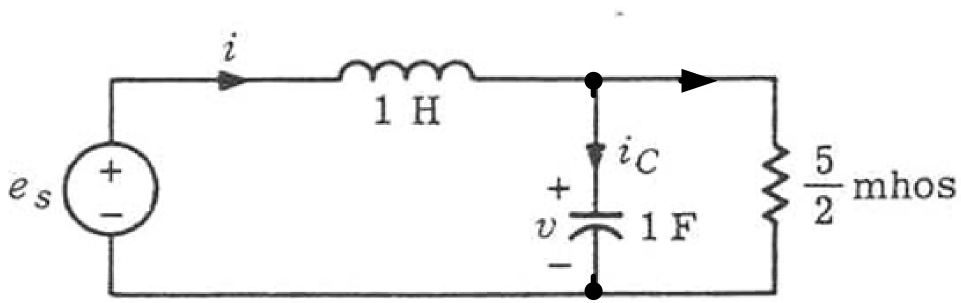
$$-i + C\frac{dv}{dt} + Gv = 0$$

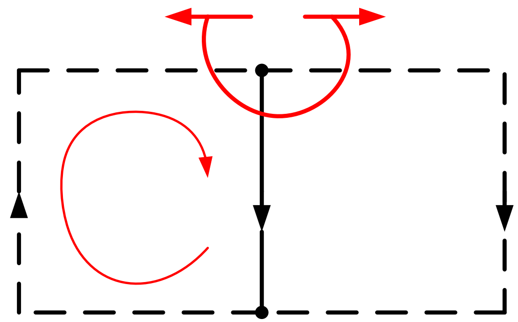
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{Gv}{C} + \frac{i_L}{C} \qquad = -\frac{\left(\frac{5}{2}\right)v}{(1)} + \frac{i}{(1)}$$

แปลงลาปลาซได้เป็น

$$sV(s) - v(0) = -\frac{5}{2}V(s) + I(s)$$

$$(s + \frac{5}{2})V(s) - I(s) = v(0)$$





Loop :

$$e_s = v_L + v$$

$$L\frac{di}{dt} = v - e_s$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{v}{L} + \frac{e_s}{L} = -\frac{v}{(1)} + \frac{e_s}{(1)} = -v + e_s$$

แปลงลาปลาซได้เป็น

$$sI(s) - i(0) = -V(s) + E(s)$$

$$sI(s) + V(s) = i(0) + E(s)$$

เขียนสมการสภาวะเป็นเมตริกซ์ได้เป็น

t - Domain $\boxed{\dot{x} = Ax + bw}$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{di}{dt} \\ \dfrac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\dfrac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e_s$$

S - Domain

$$\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s + 5/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(s) \\ V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} E(s) + \begin{bmatrix} i(0-) \\ v(0-) \end{bmatrix}$$

จาก $$\boxed{A^{-1} = \frac{A_{ij}}{\det A} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n}$$

เมื่อ A_{ij} คือ Cofactor ของ a_{ij} ใน A

จะได้ $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s + 5/2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\psi(s)}\begin{bmatrix} s + 5/2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

เมื่อ $$\psi(s) = \begin{vmatrix} s & 1 \\ -1 & s + 5/2 \end{vmatrix} = s(s + \frac{5}{2}) - (1)(-1)$$

$$= s^2 + \frac{5}{2}s + 1$$

หา *I(s)* , *V(s)* ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} I(s) \\ V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+5/2}{\psi(s)} & \dfrac{-1}{\psi(s)} \\ \dfrac{1}{\psi(s)} & \dfrac{s}{\psi(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} E(s) + \begin{bmatrix} \dfrac{s+5/2}{\psi(s)} & \dfrac{-1}{\psi(s)} \\ \dfrac{1}{\psi(s)} & \dfrac{s}{\psi(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(0-) \\ v(0-) \end{bmatrix}$$

ถ้าให้ initial condition = 0 และ input เป็นสัญญาณ impulse

จะได้ *i(0-)=v(0-)=*0 และ $e_s(t) = \delta(t) \rightarrow E(s) = 1$

$$\begin{bmatrix} I(s) \\ V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+5/2}{\psi(s)} & \dfrac{-1}{\psi(s)} \\ \dfrac{1}{\psi(s)} & \dfrac{s}{\psi(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+5/2}{\psi(s)} \\ \dfrac{1}{\psi(s)} \end{bmatrix}$$

แต่ $\psi(s) = s^2 + \frac{5}{2}s + 1 = (s+0.5)(s+2)$

$$\begin{bmatrix} I(s) \\ V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s + {}^{5}\!/_{2}}{(s+0.5)(s+2)} \\ \dfrac{1}{(s+0.5)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{{}^{4}\!/_{3}}{(s+0.5)} + \dfrac{-{}^{1}\!/_{3}}{(s+2)} \\ \dfrac{{}^{2}\!/_{3}}{(s+0.5)} + \dfrac{-{}^{2}\!/_{3}}{(s+2)} \end{bmatrix}$$

Inverse Laplace ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} i(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}e^{-0.5t} - \frac{1}{3}e^{-2t} \\ \frac{2}{3}e^{-0.5t} - \frac{2}{3}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

หา output (y) จาก $\boxed{y = c^T x + d_0 w}$

- กำหนดให้กระแส i_C เป็น output จะได้คำตอบเป็น

จาก FCS : $i_C = i_L - i_R$

$$= i - \tfrac{5}{2} v \quad = \begin{bmatrix} 1 & -\tfrac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix}$$

พบว่า $c = \begin{bmatrix} 1 \\ -\tfrac{5}{2} \end{bmatrix}$ และ $d_0 = 0$

$$i_C = \begin{bmatrix} 1 & -\tfrac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\tfrac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} e^{-0.5t} - \frac{1}{3} e^{-2t} \\ \frac{2}{3} e^{-0.5t} - \frac{2}{3} e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{i_C(t) = -\frac{1}{3} e^{-0.5t} + \frac{4}{3} e^{-2t}}$$

- สำหรับวงจรข่ายชนิด liner time-invariant ทั่วๆไป ที่ประกอบด้วย input 1 ตัว output 1 ตัว จะได้รูปทั่วไปของสมการสถานะเป็น

จาก $$\boxed{\dot{x} = Ax + bw} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\boxed{y = c^T x + d_0 w} \qquad \textbf{(2)}$$

Take laplace transform

$$(s1 - A)X(s) = bW(s) + x(0-) \qquad \textbf{(3)}$$

$$Y(s) = c^T X(s) + d_0 W(s) \qquad \textbf{(4)}$$

จาก (3) คูณด้วย ($s1+A$) ทั้งสองข้างสมการ จะได้

$$X(s) = (s1 - A)^{-1} bW(s) + (s1 - A)^{-1} x(0-)$$ แทนค่าใน (4)

- จะได้การแปลงลาปลาซของ Output เป็น

$$\underbrace{Y(s)}_{\substack{\text{Laplace transform}\\ \text{of complete}\\ \text{response}}} = \underbrace{\left[c^T\left(s1-A\right)^{-1}\mathrm{b}+d_0\right]W(s)}_{\substack{\text{Laplace transform of}\\ \text{zero-state response}}} + \underbrace{c^T\left(s1-A\right)^{-1}\mathrm{x}(0-)}_{\substack{\text{Laplace transform of}\\ \text{zero-input}\\ \text{response}}}$$