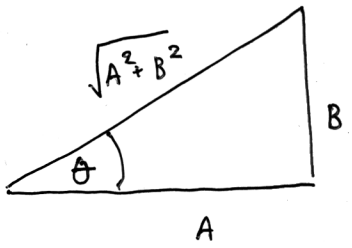
กำหนดให้ $\phi = \omega t + \alpha$

จาก หลัก ทาง ตรีโกณมิติ จะได้



$$\cos\theta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{---} \quad (1)$$

$$\sin\theta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{---} \quad (2)$$

จาก $A\sin\phi + B\cos\phi \rightarrow \sqrt{A^2+B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\phi + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\phi\right]$

จาก สมการ (1) และ (2) จะได้

$$A\sin\phi + B\cos\phi = \sqrt{A^2+B^2}\left[\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi\right]$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\left[\sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta\right]$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\left(\sin(\phi+\theta)\right)$$

$$= C\sin(\phi+\theta)$$

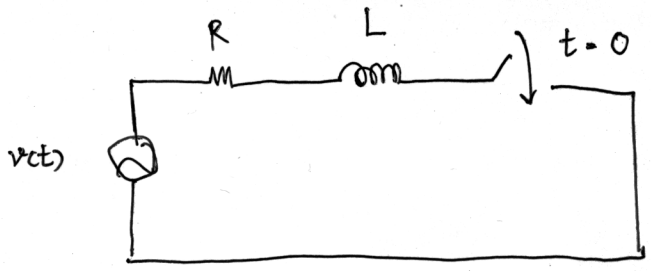
จะได้ ความสัมพันธ์ เป็น

$$A\sin\phi + B\cos\phi = C\sin(\phi+\theta)$$

$$A\sin(\omega t+\alpha) + B\cos(\omega t+\alpha) = C\sin(\omega t+\alpha+\theta) \quad \text{---} \quad (3)$$

โดยที่ $C = \sqrt{A^2+B^2}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{B}{A}$$



สมการ $L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_m \sin(\omega t + \alpha)$

1. หาคำตอบทั่วไป

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0$$

ใช้ D-operator $(LD + R)\, i(t) = 0$

$$\left(D + \frac{R}{L}\right) i(t) = 0$$

เขียนคำตอบทั่วไปได้เป็น $\boxed{i_h(t) = K_1 e^{-\frac{R}{L}t}}$

2. หาคำตอบเฉพาะ

input เป็นสัญญาณ sin ⟶ output เป็นสัญญาณ sin ที่ความถี่เดียวกัน

คำตอบเฉพาะ : $i_p(t) = K_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$

แทนสมการสมการ ;

$$L\frac{di_p(t)}{dt} + R \cdot i_p(t) = V_m \sin(\omega t + \alpha_1)$$

$$\omega L K_2 \cos(\omega t + \alpha_2) + R K_2 \sin(\omega t + \alpha_2) = V_m \sin(\omega t + \alpha_1)$$

จาก (3) $\boxed{A\sin(\omega t+\alpha) + B\cos(\omega t+\alpha) = C\sin(\omega t+\alpha+\theta)}$

จะได้ $A = Rk_2$ $\qquad C = V_{max}$

$B = \omega L k_2$

จาก $\boxed{C = \sqrt{A^2+B^2}}$ จะได้

$$V_{max} = \sqrt{R^2k_2^2 + (\omega L)^2 k_2^2}$$

$$= k_2\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$$

จะได้ $$k_2 = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} = \frac{V_{max}}{|Z|}$$

จาก $\boxed{\theta = \tan^{-1}\frac{B}{A}}$ จะได้

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\omega L k_2}{R k_2}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

จาก (3) ได้ความสัมพันธ์ระหว่าง α_1 กับ α_2 เป็น

$\alpha_1 = \alpha + \theta$ และ $\alpha_2 = \alpha$

พบว่า $\boxed{\alpha_2 = \alpha_1 - \theta}$

ถ้า $\alpha_1 = \alpha \longrightarrow \alpha_2 = \alpha - \theta$

จะได้ คำตอบเฉพาะเป็น $\boxed{i_p(t) = \frac{V_{max}}{|Z|}\sin(\omega t + \alpha - \delta)}$

★ กระแสผลลัพธ์ จะได้จาก

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t)$$

$$i(t) = k_1 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_{max}}{|Z|} \sin(\omega t + \alpha - \theta)$$

ที่ $t = 0 \rightarrow i(t) = 0$ จะได้

$$i(0) = k_1 e^{-\frac{R}{L}(0)} + \frac{V_{max}}{|Z|} \sin(\omega(0) + \alpha - \theta)$$

$$0 = k_1 + \frac{V_{max}}{|Z|} \sin(\alpha - \theta)$$

จะได้ $$k_1 = -\frac{V_{max}}{|Z|} \sin(\alpha - \theta)$$

★ รูปสมการทั่วไป ของกระแสผลลัพธ์ในวงจร RL เป็น

$$i(t) = \frac{V_{max}}{|Z|} \sin(\omega t + \alpha - \theta) - \frac{V_{max}}{|Z|} e^{-\frac{R}{L}t} \sin(\alpha - \theta)$$